



Examen du 8 janvier 2013 (Durée 2 heure)

Une feuille manuscrite recto-verso est autorisée, les autres documents ne sont pas autorisés.

Il sera tenu compte de la rigueur de la rédaction et de la clarté de la présentation

Pour tout l'examen on suppose que l'on dispose d'un générateur aléatoire `Random()` qui fournit une séquence de nombres réels aléatoires indépendants de même loi uniforme sur $[0, 1[$.

Exercice 1 : Algorithme inconnu...

On dispose d'une fonction `Random()` qui renvoie une séquence de nombres réels indépendants de loi uniforme sur $[0, 1[$.

```
Générateur-Mystère()
```

```
repeat
  | U = Random ()
  | X = 1/U
until X ≤ 2
return X
```

Question 1.1 : Loi de X

Donner la loi de la variable X retournée par cet algorithme, calculer sa moyenne et sa variance.

Question 1.2 : Coût de l'algorithme

Déterminer le coût de cet algorithme et en proposer un plus efficace.

Exercice 2 : Générateur de noms

On veut générer des chaînes de caractères, par exemple des noms de fichiers, de manière aléatoire et uniforme. Pour simplifier l'analyse on suppose qu'une telle chaîne est composée d'une lettre suivie de n chiffres entre 0 et 9. Pour éviter les erreurs dans la recopie des noms de fichiers on ajoute une contrainte de cohérence : *la somme des n chiffres est divisible par 3*.

Question 2.1 : Algorithme de génération

Écrire un algorithme de génération uniforme de telles chaînes de caractère.

Question 2.2 : Exemple

Pour $n = 3$ et à partir de la table de nombres aléatoires en annexe, donner les 3 premières chaînes générées par votre algorithme.

Question 2.3 : Coût

Évaluer le coût de votre algorithme.

Exercice 3 : Test d'indépendance d'un générateur ...

On dispose d'un générateur aléatoire de nombres réels sur $[0, 1[$, on suppose que la séquence des tirages est modélisée par une séquence $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'intervalle réel $[0, 1[$.

Question 3.1 : Séquence croissante



Calculer pour tout n

$$\mathbb{P}(U_1 < U_2 < \dots < U_n).$$

On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(U_1 < U_2)$, puis $\mathbb{P}(U_1 < U_2 < U_3)$ pour trouver le bon argument.

Soit R la variable aléatoire définie pour $n \geq 2$

$$(R = n) = (U_1 < U_2 < \dots < U_{n-1} > U_n)$$

Question 3.2 :

A partir de la table de nombres aléatoires donnée en annexe, donner une séquence de 5 valeurs indépendantes observées de R

Question 3.3 :

Calculer la loi de R , sa moyenne et sa variance.

Question 3.4 :

Proposer un test statistique permettant d'invalider un générateur sur un critère de longueur de suites croissantes.

Exercice 4 : Graphes et coloriage...

Soit $\mathcal{G} = (X, E)$ un graphe fini non orienté. À une partie W de X on associe N_W le nombre d'arêtes joignant W et son complémentaire W^c .

Question 4.1 :

On génère une partie L uniformément sur l'ensemble des sommets. Calculer

$$\mathbb{E}N_L.$$

Question 4.2 :

En déduire qu'il existe toujours une partie W telle que

$$N_W \geq \frac{1}{2}|E|.$$

Annexe : Réels pseudo-aléatoires indépendants et uniformément distribués sur $[0, 1[$

Indiquer pour chaque utilisation le parcours effectué de la table

0.327010	0.057128	0.994553	0.214157	0.825574	0.795653	0.068671	0.667426	0.755272	0.461837
0.788446	0.411315	0.905150	0.781532	0.794132	0.095405	0.647180	0.548351	0.271737	0.638842
0.723094	0.464648	0.332958	0.886690	0.764691	0.604677	0.390348	0.213932	0.135788	0.528952
0.155550	0.462798	0.586080	0.150103	0.676956	0.411654	0.945757	0.745627	0.079080	0.701028
0.207464	0.867526	0.112343	0.112614	0.649058	0.906475	0.208019	0.296238	0.454826	0.479756
0.935080	0.177919	0.944403	0.268038	0.064609	0.709094	0.872715	0.454958	0.923026	0.008503
0.983909	0.078576	0.471301	0.569990	0.228680	0.148257	0.981644	0.174436	0.893884	0.060724
0.875465	0.101348	0.928250	0.987808	0.213961	0.577309	0.894283	0.421980	0.873546	0.349109
0.901736	0.808627	0.527028	0.846139	0.076665	0.591637	0.555233	0.949380	0.046595	0.478259
0.957883	0.030504	0.556835	0.429184	0.600494	0.785515	0.577441	0.582138	0.959951	0.471325