Chaînes de Markov

Florence Perronnin

Évaluation de Performances
RICM4 Option Réseaux

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

POLYTECH GRENOBLE

February 2, 2017

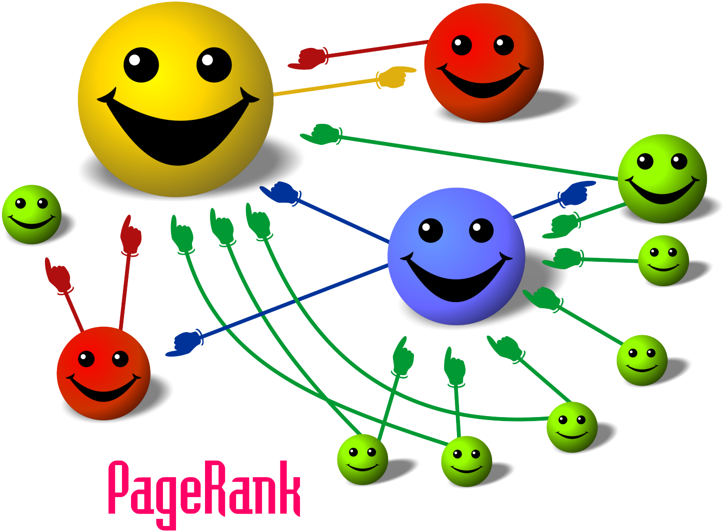
La Modélisation

Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée.

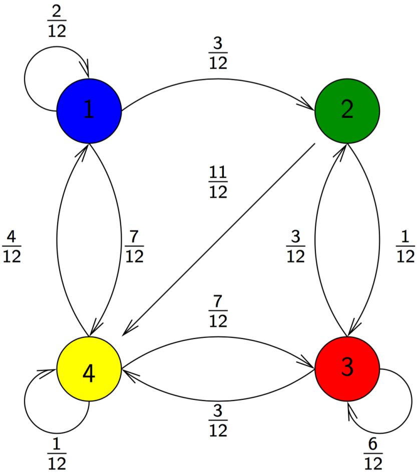
John von Neumann.

Outline

PageRank



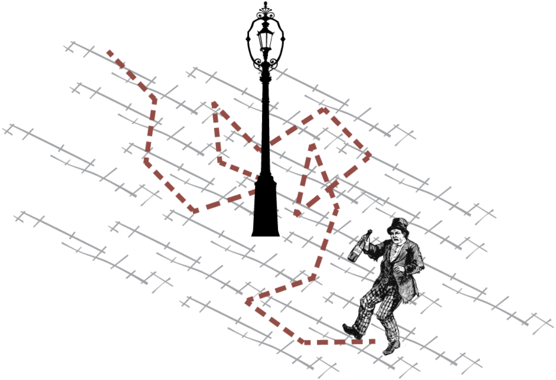
Une version plus petite



Tom et Jerry

Marche aléatoire I

Marche aléatoire II



M. Jourdain

Vous avez déjà simulé une chaîne de Markov . . .

PS: DM1

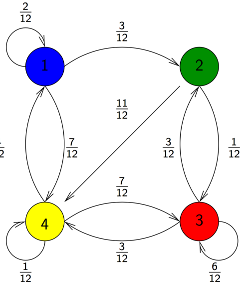
- Génération P_i
- Population aux yeux bleus: BB_i
- Population aux yeux marrons: MM_i
- Population initiale P_0

À vous de jouer...

- État du système?
- Temps discret?
- Dynamique?
- Graphe de transition?

Outline

(Discrete-time) Markov chains



- État
- Temps discret
- Transitions probabilistes
- État (ou distribution) initiale
- fonction de transition

Transition matrix

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Random mapping

- X_n is what we want
- Evolves in state space $\mathcal{S}$
- Trajectory given by $X_0 = x_0$ and

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, \xi_n)$$

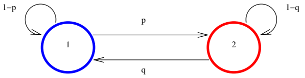
On va chercher à dire des choses sur cet état, qui pourtant change tout le temps...

Outline

Automate Flip-Flop (Bascule)

système ON-OFF

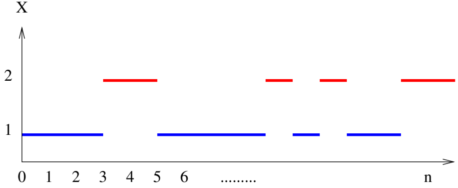
Modèle à deux états :
- ligne de communication
- activité processeur
- ...



Paramètres :
- proportion des transitions : p, q
- Temps de séjour moyen en 1 : $\frac{1}{p}$
- Temps de séjour moyen en 2 : $\frac{1}{q}$

Trajectoire

X_n état de l'automate à l'instant n.



Distribution transitoire

$$\pi_n(1) = \mathbb{P}[X_n = 1];$$

$$\pi_n(2) = \mathbb{P}[X_n = 2]$$

Problème

Estimation de π_n : prévision de l'état

Calcul de $\lim_{n\to\infty} \pi_n$: utilisation de ressource

Modèle Mathématique

Probabilités de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 | X_n = 1] &= 1-p; \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 2 | X_n = 1] &= p; \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 | X_n = 2] &= q; \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 2 | X_n = 2] &= 1-q. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \pi_{n+1}(1) = \pi_n(1)(1-p) + \pi_n(2)q; \\ \pi_{n+1}(2) = \pi_n(1)p + \pi_n(2)(1-q); \end{cases}$$

$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

Iterations linéaires

Spectre de P (valeurs propres)

$\mathcal{S}p = \{1, 1-p-q\}$

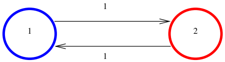
Résolution du système

$|1-p-q| < 1$ cas non pathologique

$$\begin{cases} \pi_n(1) = \frac{q}{p+q} + \left(\pi_0(1) - \frac{q}{p+q}\right)(1-p-q)^n; \\ \pi_n(2) = \frac{p}{p+q} + \left(\pi_0(2) - \frac{p}{p+q}\right)(1-p-q)^n; \end{cases}$$

$1-p-q = 1$ $p = q = 0$ Comportement réductible

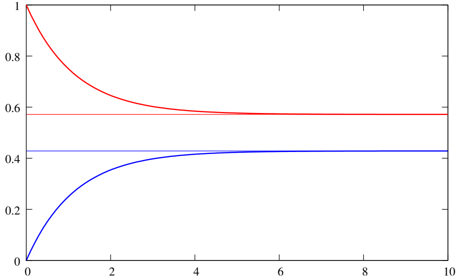
$1-p-q = -1$ $p = q = -1$ Comportement Périodique



Comportement récurrent

Exemple numérique

$p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{3}$



Convergence rapide
(taux exponentiel)

Comportement stationnaire

$$\begin{cases} \pi_\infty(1) = \frac{q}{p+q}; \\ \pi_\infty(2) = \frac{p}{p+q}. \end{cases}$$

π_∞ unique vecteur probabilité solution

$$\pi_\infty = \pi_\infty P.$$

Si $\pi_0 = \pi_\infty$ alors $\pi_n = \pi_\infty$ pour tout n
Comportement stationnaire

Outline

Chaîne de Markov à temps discret (CMTD)

Propriété de Markov

Espace d'états discret $\mathcal{S} = \{1, 2, \cdots, K\}$
Le processus stochastique $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov** si

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

pour tout instant n et tout (n+2)-uplet d'états $(i_0, \cdots, i_{n-1}, i, j) \in \mathcal{S}^{n+2}$.
Propriété sans mémoire (conditionnellement à l'état courant)

Interprétation algébrique

la chaîne de Markov est **homogène** si

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = \mathbb{P}[X_1 = j | X_0 = i] = p_{i,j}.$$

$P = ((p_{i,j}))$ est une matrice stochastique

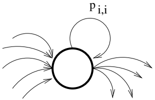
$$p_{i,j} \geq 0;$$

et

$$\sum_j p_{i,j} = 1.$$

Temps de séjour

T_i temps de séjour dans l'état i :



Distribution géométrique $p_{i,i}$

$$\mathbb{P}[T_i = k] = (1 - p_{i,i}) p_{i,i}^{k-1};$$

$$\mathbb{E}[T_i] = \frac{1}{1 - p_{i,i}}.$$

Représentations

- État : X_n
- Espace d'états $\mathcal{S}$ (state space)
- Probabilités d'état $\pi_n(i) = \mathbb{P}[X_n = i]$
- $\pi_\mathbf{n}$ sous forme vectorielle : distribution transitoire
- transition en 1 étape (loi des probabilités totales) :

$$\pi_{\mathbf{n+1}} = \pi_\mathbf{n}\mathbf{P}$$

- fonction de transition :

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, \xi_n)$$

  où

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{E} \times (0,1) &\to \mathcal{E} \\ X_n &\mapsto \Phi(X_n, \xi_n) \end{aligned}$$

  et où ξ_n est l'innovation aléatoire.

Simulation du régime transitoire

1. On part d'un état initial X_0.
   N.B : cet état peut aussi être aléatoire en fixant une distribution initiale.
2. On fixe un critère d'arrêt: par exemple la *durée* maximale T de simulation
3. Pour chaque itération n

   on tire l'innovation aléatoire ξ_n et on applique la fonction de transition Φ.
   (On tire l'événement suivant selon sa probabilité d'occurrence et on applique le changement d'état correspondant.)

Pièges

- Pertinence du critère d'arrêt?
- Choix (et influence) de l'état initial?
- Que peut-on conclure des résultats de cette simulation?
- Combien de trajectoires faut-il simuler?

Chaîne de Markov à temps discret

Equation de Chapman-Kolmogorov

Interprétation trajectorielle

$$\mathbb{P}[X_{m+n} = j | X_0 = i] = \sum_k \mathbb{P}[X_{m+n} = j | X_m = k] \,.\mathbb{P}[X_m = k | X_0 = i]$$

$$= \sum_k \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = k] \,.\mathbb{P}[X_m = k | X_0 = i]$$

$$== \sum_k P_{kj}^{(n)} P_{ik}^{(m)}.$$

Probabilité d'une trajectoire $(i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_n)$

$$\mathbb{P}[X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0] = \mathbb{P}[X_0 = i_0]\, p_{i_0,i_1} . p_{i_0,i_1} \ldots p_{i_{n-1},i_n}$$

transition en n étapes

$$\mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i] = p_{i,j}^{(n)}.$$

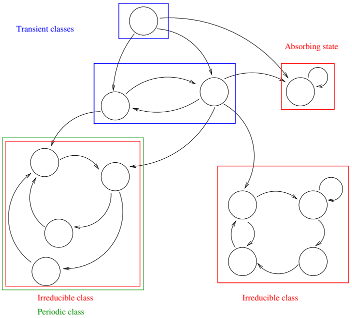
Itération $\Longrightarrow$ produit matriciel

$$((p_{i,j}^{(n)})) = P^n$$

Outline

Classification des états

Analyse de Graphe



Classe irréductible

Composantes connexes
i et j sont dans la même composante (communiquent) s'il existe un chemin de i vers j et un chemin de j vers i avec une probabilité positive.
Les états des classes irréductibles sont appelés **récurrent**

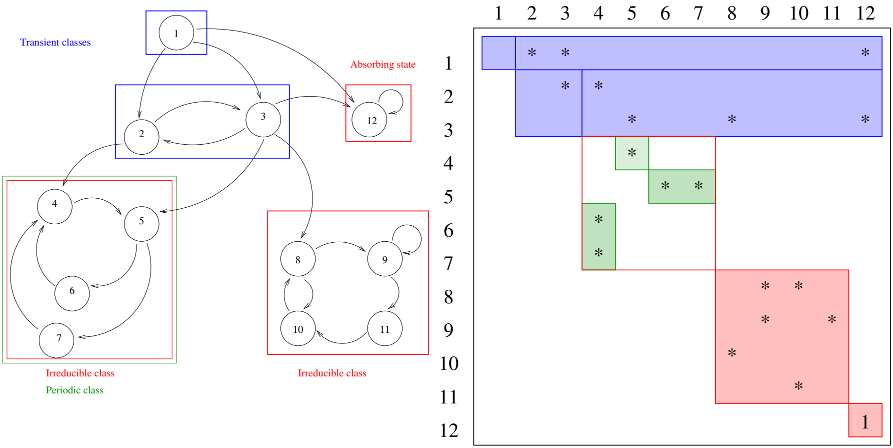
Les autres états sont appelés **transient**

Périodicité

Une classe irréductible est apériodique ssi le PGCD de la longueur de tous ses cycles est 1

Une chaîne de Markov est irréductible s'il existe une unique classe irréductible.
Tout état est donc atteignable depuis tout autre par un chemin de probabilité positive.

Classification d'états: forme matricielle



Théorème de Convergence

Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov **homogène irréductible** et **apériodique** de matrice de transition P

1. **Convergence en loi** La distribution transitoire π_n *converge* vers une distribution limite π :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i] \stackrel{def}{=} \pi(j),$$

2. **Equation d'équilibre** π est l'**unique** vecteur de probabilités solution du système linéaire

$$\pi = \pi P$$

   π est la distribution stationnaire (point fixe)

3. **Vitesse de Convergence**

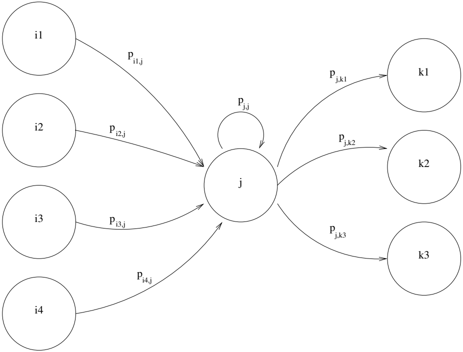
$$||\pi - \pi_n|| \leq C.\alpha_1^n,$$

   α_1 deuxième valeur propre de P et constante C

Interprétation

Équations d'équilibre (*balance equation*)

$$\pi(j) = \sum_i \pi(i) p_{i,j} \qquad \text{pour tout état j.}$$



Si $\pi_0 = \pi$ le processus est stationnaire ($\pi_n = \pi$)

Normalisation

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi(i) = 1$$

Ergodicité

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov **homogène irréductible** et **apériodique** de matrice de transition P

$T_n(i)$: temps passé dans l'état i pour la trajectoire $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$

$$T_n(i) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[X_k=i]}$$

Théorème Ergodique

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} T_n(i) = \pi(i).$$

Pour toute fonction de gain f

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \mathbb{E}_\pi f(X).$$

Gain moyen par unité de temps

Outline

Transmission avec erreurs

Un routeur reçoit des paquets de taille identique arrivant dans les intervalles de temps disjoints. Hypothèses:

- maximum 1 paquet par unité de temps $]t(n), t(n+1)[$
- arrivées **i.i.d**
- buffer infini
- erreur de transmission avec proba $(1-p)$ (occurrences **i.i.d**), indépendamment des arrivées
- durée de transmission: 1 unité de temps
- début à l'instant t(n) si au moins 1 paquet en attente

Modélisation

- $A(n) \in \{0,1\}$ nombre d'arrivées dans $]t(n), t(n+1)[$: $\sim \mathcal{B}(a)$
- $D(n)$ nombre de transmissions réussies dans $]t(n), t(n+1)[$: $D(n) \sim \mathcal{B}(p)$
- $X(n)$ nombre de paquets dans le routeur

équations d'évolution:

$$X(n) = \begin{cases} A(n) & \text{si } X(n) = 0 \\ X(n) + A(n) - D(n) & \text{si } X(n) > 0 \end{cases}$$

Caractérisation de la CMTD

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & \dots \\ (1-a)p & ap+(1-a)(1-p) & a(1-p) & 0... \\ 0 & (1-a)p & ap+(1-a)(1-p) & a(1-p)... \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$