Recueil d'exercices en Probabilités et Simulation

Jean-Marc.Vincent@imag.fr
Univ. Grenoble Alpes, LIG, F-38000 Grenoble, France

Table des matières

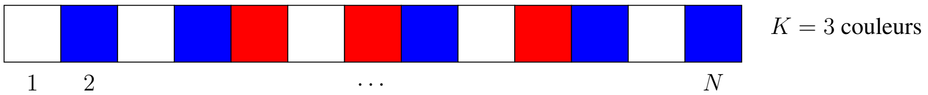
1 Un gagnant parmi K *(Quick 2016)*

Dans une partie, K joueurs jettent chacun une pièce de monnaie ($K \geqslant 3$). Un joueur gagne une partie si son tirage est différent de celui de tous les autres joueurs.

1. Proposer un modèle de cette situation.
2. Calculer la probabilité p_K que la partie ait un gagnant.
3. Écrire un code R qui génère un échantillon de N parties.
4. On note T_K le nombre de parties nécessaires pour avoir un gagnant. Calculer la loi de T_K et donner sa moyenne.
5. Que pensez-vous de ce jeu ?

2 Banderole colorée *(Quick 2015)*

Pour la fête de Polytech', les étudiants de RICM ont décidé de décorer l'école avec d'une grande banderole avec plusieurs couleurs. Une banderole est constituée d'un ensemble de carrés colorés. Pour qu'elle soit originale ils proposent de la générer aléatoirement avec la contrainte que 2 carrés successifs ne soient pas de même couleur.



On note N la longueur de la banderole et K le nombre de couleurs. Bob propose de générer un tableau C de taille N avec $C[i]$ la couleur du carré i et écrit l'algorithme suivant :

```
Générateur-Bob(N,K)
  // BanderoleOk renvoie - vrai si la banderole ne comporte pas de
     cases successives de même couleur, - faux sinon
  repeat
     for i = 1 to N
        C[i]=Alea (K);
  until BanderoleOk (C,N)
  return C
```

1. Prouver que cet algorithme génère une banderole choisie uniformément parmi les banderoles n'ayant pas 2 cases successives de même couleur.

   Alice n'est pas convaincue de l'intérêt de cette méthode.
2. Calculer le coût moyen de cet algorithme en nombre d'appels à la fonction `Alea` et commenter ce résultat.
3. Pour rassurer Alice de la possibilité de générer une telle banderole
   (a) Proposer un algorithme de génération uniforme de banderole plus efficace.
   (b) Prouver l'algorithme.
   (c) Donner la complexité de l'algorithme.

3 Le professeur Nébulus *(Quick 2015)*

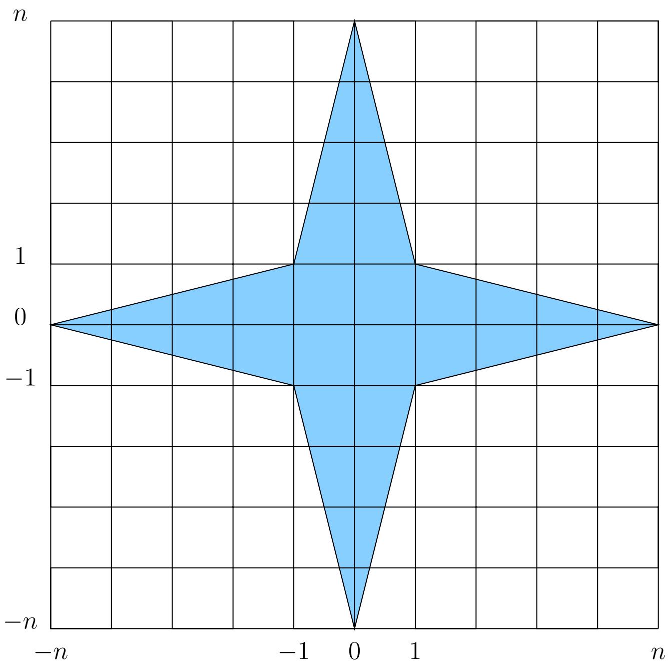
Le professeur Nébulus voyage par avion de Los Angeles à Paris avec deux escales, la première à New York, la seconde à Londres. La fréquence de perte de bagages est la même, f, à Los Angeles, à New York et à Londres. Arrivé à Paris, le professeur Nébulus constate l'absence de sa valise.

1. Où chercher ? Avec quelle probabilité celle-ci est-elle restée à Los Angeles ? à New York ? à Londres ?
2. Code R
   Écrire un code R permettant de simuler le phénomène et de tracer en fonction de f une estimation de la probabilité que, lorsque la valise est perdue, la valise soit perdue à Los Angeles, New York ou Londres, et ainsi valider expérimentalement les résultats de la question précédente.
3. Simulation
   Quelles difficultés va-t-on rencontrer pour faire de telles simulations ?

(Quick 2016)

4 L'étoile *(Quick 2015)*

On considère une étoile à 4 branches de taille n.



1. Génération dans l'étoile
   Écrire un algorithme de génération uniforme d'un point sur la surface de l'étoile, le prouver et calculer son coût moyen.

5 Stratégie *(Quick 2014)*

Une urne contient N boules noires et une boule multicolore. Alice et Bob tirent alternativement une boule dans l'urne, jusqu'à ce que l'un d'eux tire la boule multicolore et est déclaré gagnant. Une fois tirée la boule n'est pas replacée dans l'urne (tirage sans remplacement). Bob, galant propose à Alice de commencer si elle le souhaite. Que doit faire Alice ?

1. Modélisation
   Proposer un modèle probabiliste pour cette situation.
2. Stratégie
   Quelle stratégie doit choisir Alice entre commencer ou laisser Bob commencer pour maximiser sa probabilité de gagner ?

6 Générateur de dés *(Quick 2014)*

Parmi ces générateurs de dés, certains trichent, lesquels et pourquoi ? On suppose que l'on dispose d'un générateur aléatoire de bonne qualité, c'est à dire tel que la séquence des appels successifs à **Random** peut être modélisée par une séquence de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1[$.

```
Dé1()
  return int (Random ()*6)+1
  // int retourne la partie entière
     inférieure.
```

```
Dé2()
  return round (Random *5)+1
  // round retourne l'entier le
     plus proche.
```

```
Dé3()
  Y=int (Random ()*12)+1
  return Y mod 6 +1
  // mod est le modulo
```

```
Dé4()
  Y=int (sqrt (Random ()*6))+1
  return Y
  // sqrt est la racine carrée
```

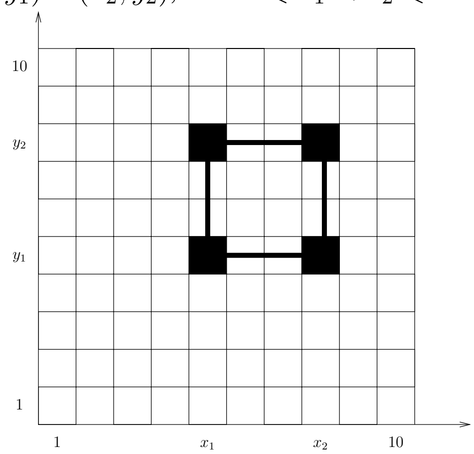
```
Dé5()
  repeat
  |  Y=int (Random ()*10)+1
  until Y<7
  return Y
```

```
Dé6()
  repeat
  |  Y=int (Random ()*11)
  until Y pair
  return Y/2+1
```

1. Pour chacun des dés prouvez votre résultat.

7 Carrés *(Quick 2014)*

On dispose d'une grille de $n \times n$ cases. Un carré sur la grille est un ensemble de 4 points de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) et (x_2, y_2), avec $1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant n$ et $1 \leqslant y_1 < y_2 \leqslant n$.



1. Générateur uniforme d'intervalle Écrire un algorithme qui génère uniformément un intervalle de $\{1, 2, \cdots, n\}$ et donner la preuve de votre algorithme.
2. Générateur de carré Donner un algorithme qui génère uniformément un carré sur une grille de taille $n \times n$.

3. Exemple Donner les 2 premiers carrés générés dans une grille 10×10 à partir de la table des nombres aléatoires donnée ci-dessous.

8 Ali Baba *(Quick 2013)*

Le sultan dit à Ali Baba : "Voici deux urnes, quatre boules blanches et quatre boules noires. Répartis les boules dans les urnes à ta convenance. Je mélange les deux urnes, tire une boule dans l'une des urnes, tu auras la vie sauve si elle est blanche."

1. La vie sauve
   Comment Ali Baba peut-il maximiser ses chances ?

9 Générateur mystère *(Quick 2013)*

Soit le générateur de variable aléatoire discrète défini par l'algorithme suivant

```
Générateur-Mystère(n)
  repeat
    N1 =Alea (n)
    // Alea (n) génère un nombre aléatoire uniformément dans
       {0, ··· , n}
    N2 =Alea (n)
  until N1 + N2 ⩽ n
  return N1
```

1. Exemple À partir de la table de nombres réels donnée en annexe, donner les valeurs de 5 appels successifs de Générateur-Mystère(9). On précisera la manière dont la fonction **Alea** est construite et la façon dont la table est utilisée.
2. Analyse Calculer la loi de la valeur retournée. Calculer la fonction de répartition, l'espérance et la variance (optionnel) de la valeur retournée.
3. Autre méthode Proposer une autre méthode de génération, est-elle plus efficace ?

10 Générateur de graphe *(Quick 2013)*

1. Donner un algorithme qui génère uniformément un graphe ayant n nœuds.

11 Loi géométrique *(Quick 2013)*

Soit X_1 et X_2 variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2, c'est à dire $\mathbb{P}(X_i = k) = p_i(1-p_i)^k$ avec $i = 1$ ou 2.

1. Expliquer pourquoi $X = \min(X_1, X_2)$ suit une loi géométrique de paramètre p que l'on calculera en fonction de p_1 et p_2
2. Simulation
   Proposer un algorithme de simulation de loi géométrique de paramètre p et donner sa complexité.

```
Générateur()
  U=Random ()
  // Random () génère un nombre réel uniformément dans [0,1[
  return int (log U)
```

3. Analyser cet algorithme
4. En déduire une autre méthode de génération d'une loi géométrique de paramètre p.

12 Jeu de hasard *(Quick 2012)*

Alice et Bob jouent à un jeu de pile ou face avec une pièce biaisée. Alice commence par lancer la pièce, si le résultat est pile Alice gagne sinon Bob lance la pièce, s'il obtient pile il gagne sinon on recommence par Alice.

1. Modélisation Proposer un modèle pour ce système aléatoire.
2. Durée de la partie Donner la loi de la durée d'une partie, sa moyenne et sa variance.
3. Tracer la probabilité de gain d'Alice en fonction de p et commenter la courbe.

13 Triangles *(Quick 2012)*

On considère un bâton que l'on coupe en 3 morceaux. Quelle est la probabilité que l'on puisse faire un triangle avec ces 3 morceaux ?

On supposera que le bâton est modélisé par l'intervalle $[0,1[$ et que les points de découpe U_1 et U_2 du bâton sont tirés uniformément sur l'intervalle.

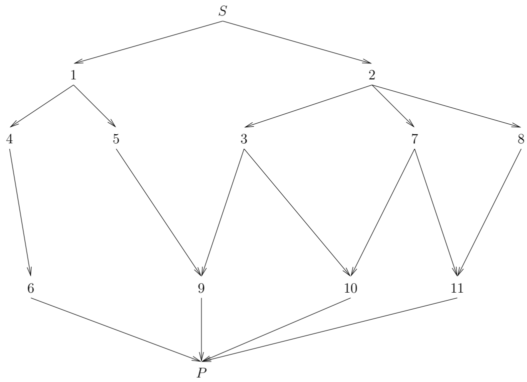
1. Donner la condition sur U_1 et $U2$ pour pouvoir construire un triangle et en déduire un dessin pour calculer la probabilité et donner cette probabilité.

14 Chemins critiques *(Quick 2012)*

On considère un graphe de tâche constitué d'une source S, d'un puits P sans arc redondant. Tout chemin de S à P peut être critique.

Pour tester le graphe de tache, on souhaite écrire un algorithme de génération uniforme de chemin critique de S à P.

1. Proposer une méthode permettant la génération uniforme d'un chemin critique.
2. Application Pour le graphe ci-dessous générer, en utilisant la table des nombres au hasard 2 chemins critiques (bien expliquer le procédé).



15 Génération de loi continue *(Quick 2011)*

Soit X une variable aléatoire dont la densité f est définie sur $[0, 1[$ par

$$f(x) = \beta x(1 - x).$$

1. Propriétés de la loi Calculer la valeur de β. Calculer la fonction de répartition de X. Calculer la moyenne et la variance de X.
2. Simulation Proposer un algorithme de simulation de variable aléatoire de loi de densité f. On prouvera cet algorithme et on évaluera son coût en nombre d'appels à `random()`.

16 Générateur mystère (2) *(Quick 2011)*

Soit le générateur de variable aléatoire discrète défini par l'algorithme suivant

Mystere2()
  u =**Random** ()
  return int (-log(u))

1. Quelle est la loi de la valeur retournée X ?

17 Tous au rapport *(Quick 2010)*

Soit $Z = \frac{U}{V}$ avec U et V variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Représenter sur un carré l'événement $(Z \leqslant a)$. En déduire la fonction de répartition de Z ainsi que sa densité.
2. Calculer $\mathbb{E}Z$. Commenter votre résultat.
3. La densité d'une loi de Cauchy, définie sur $\mathbb{R}$ est donnée par

   $$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

   Donner un algorithme générant une variable de loi de Cauchy.

Gagner sur le hasard *($\sim$ 4 points)*

Extrait du livre de Pierre Brémaud, *Initiation aux probabilités* Springer 2009.

> *Un quidam choisit deux nombres réels, et ne vous dit pas lesquels pour l'instant. Il écrit chacun des nombres sur un morceau de papier, et il place les morceaux de papier dans deux boîtes différentes, qu'il prend soin de fermer. Il vous demande de choisir une de ces boîtes au hasard, selon le résultat d'un lancer de pièce de monnaie (non truquée), ce que vous faites. Il ouvre alors la boîte, vous fait lire le morceau de papier qu'elle contient, et vous pose la question suivante : est-ce le plus grand des nombres qu'il a choisis ?*
>
> *Existe-t-il une stratégie de réponse qui vous garantit que vous avez plus de chances de donner la bonne réponse que la mauvaise ? A priori, il semble que non, et que vous avez autant de chances de vous tromper que de tomber sur la bonne réponse. Et pourtant...*
>
> *Voici comment procéder pour gruger la Fortune aveugle. Choisissez un nombre de référence Z de manière aléatoire, avec la densité de probabilité (quelconque) f avec $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^+$. Si Z est strictement plus grand que le nombre dévoilé, pariez que le nombre resté secret est plus grand que celui qui a été dévoilé.*

1. Modéliser le problème posé, montrer que la stratégie est gagnante (la probabilité de gagner est $> \frac{1}{2}$) .

18 Jeu de pièces *(Quick 2010)*

On dispose de trois pièces biaisées chaque face de la pièce rapporte un certain score dépendant de la pièce. Chacun des 2 joueurs choisit l'une de trois pièces et lance sa pièce, la pièce affichant le plus fort score remporte la mise de 1500 euros.

Pièce	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$
Probabilité de pile	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
Score pile	10	4	3
Score face	2	4	20

1. Proposer une modélisation de ce jeu.
2. Votre adversaire propose de choisir sa pièce en premier. Êtes-vous d'accord ?

Annexe : Réels pseudo-aléatoires indépendants et uniformément distribués sur $[0, 1[$

Indiquer pour chaque utilisation le parcours effectué de la table

0.327010	0.057128	0.994553	0.214157	0.825574	0.795653	0.068671	0.667426	0.755272	0.461837
0.788446	0.411315	0.905150	0.781532	0.794132	0.095405	0.647180	0.548351	0.271737	0.638842
0.723094	0.464648	0.332958	0.886690	0.764691	0.604677	0.390348	0.213932	0.135788	0.528952
0.155550	0.462798	0.586080	0.150103	0.676956	0.411654	0.945757	0.745627	0.079080	0.701028
0.207464	0.867526	0.112343	0.112614	0.649058	0.906475	0.208019	0.296238	0.454826	0.479756
0.935080	0.177919	0.944403	0.268038	0.064609	0.709094	0.872715	0.454958	0.923026	0.008503
0.983909	0.078576	0.471301	0.569990	0.228680	0.148257	0.981644	0.174436	0.893884	0.060724
0.875465	0.101348	0.928250	0.987808	0.213961	0.577309	0.894283	0.421980	0.873546	0.349109
0.901736	0.808627	0.527028	0.846139	0.076665	0.591637	0.555233	0.949380	0.046595	0.478259
0.957883	0.030504	0.556835	0.429184	0.600494	0.785515	0.577441	0.582138	0.959951	0.471325