Files d'attente 1 : modélisation

Florence Perronnin

Université Grenoble Alpes

février 2018

Outline

Modélisation

Example

Central téléphonique:

- N lignes
- arrivées des appels: x par unité de temps en moyenne
- durée d'un appel: $\frac{1}{\mu}$

Sous des hypothèses très générales:

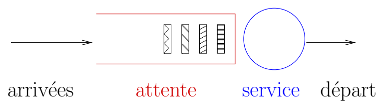
- arrivées Poissonniennes
- durées d'appel i.i.d suivant une loi arbitraire

On peut montrer que :

$$\mathbb{P}[\text{blocage}] = \frac{\frac{x}{\mu^N N!}}{1+\frac{x}{\mu}+\ldots+\frac{x}{\mu^N N!}} \quad (1)$$

Outline

Formalisme des files d'attente



Notation de Kendall

A/S/P/[K]/[D]

- A loi des inter-arrivées
- S loi de service
- P nombre de serveurs (défaut : 1)
- K capacité: nombre de clients total admissibles (défaut: $+\infty$)
- D discipline de service: FIFO, LIFO, PS, SRPT, P-R, ... (défaut: FIFO)

Notation de Kendall

Les lois d'arrivées A et de départs D peuvent prendre les valeurs suivantes :

- M : Memoryless (exponentielle)
- D : Déterministe
- G: Générale (quelconque)
- GI: Générale Indépendante
- E_k : Erlang d'ordre k
- H_k : Hyperexponentielle
- Ph: phase-type
- ...

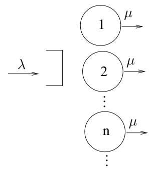
Exemples de files classiques

1. $M/M/1$:
   - Inter-arrivées de loi exponentielle (Markov): processus de Poisson $\mathbb{P}[a_{n+1} - a_n \leq \tau] = 1 - e^{-\lambda\tau}$
   - Loi de service exponentielle (Markov): $\mathbb{P}[s_n \leq \tau] = \mathbb{P}[s_n \leq \tau | s_n \geq x] = 1 - e^{-\mu\tau}$ si $\tau \geq x$ (sans mémoire)
   - 1 seul serveur
   - Capacité de stockage infinie (implicite)
   - Politique FIFO (implicite)
2. $M/M/c/c$:
   - Inter-arrivées et services de loi exponentielle
   - c clients possibles dans le système au maximum
   - c serveurs: il n'y a donc pas de salle d'attente!

   Ce modèle sert à représenter des centraux téléphoniques par exemple (rejet si toutes les lignes sont occupées).

Exemples de files classiques

3. $M/GI/\infty$
   - Arrivées poissonniennes
   - Services indépendants, de loi quelconque (aléatoire ou non)
   - infinité de serveurs: pas non plus de salle d'attente!



   Ce modèle sert souvent à représenter un processus d'arrivées (voir chapitre modèles de trafic).
4. Exercice: file d'attente pour le modèle d'Erlang?

Outline

Description des files d'attente

On s'intéresse à la dynamique d'un système :

- Arrivées (client, travail)
- Départs
- Courbes de charge / backlog
- Temps de réponse

Ces quantités peuvent être discrètes ou continues (modèles fluides).
Les systèmes discrets sont caractérisés par des processus stochastiques, et les outils fondamentaux pour les étudier sont les chaînes de Markov. Les modèles continus sont en général décrits par des équations différentielles.

Modélisation continue

- $A(t)$ somme totale de travail arrivée dans $[0, t]$
- $D(t)$ quantité de travail fourni dans dans $[0, t]$ (départs)
- $Q(t) = A(t) - D(t)$ backlog (charge): travail restant à effectuer à l'instant t.

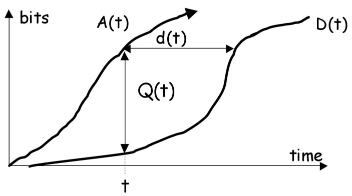
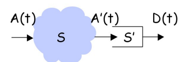


Figure : Backlog [Le Boudec 2006]

Question

Comment définir $d(t)$?

Exemple: bufferisation (Modélisation continue)



- Source à débit continu $A(t) = rt$
- Délai variable sur le réseau
- Comment éliminer la gigue dans $A'(t)$?
- Quel délai choisir?
- Quelle taille de buffer faut-il?

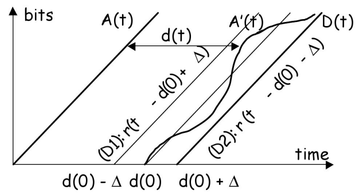


Figure : Bufferisation [Le Boudec 2006]

Modélisation discrète

- Dates d'arrivées $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
- Inter-arrivées $\tau_n = a_{n+1} - a_n$
- taux d'arrivée λ
- Dates de départs $d_1, \ldots, d_n, \ldots$
- Durées de service $\sigma_1, \ldots$
- Taux de service $\mu = \frac{1}{\mathbb{E}[\sigma]}$
- Nombre de clients dans le système $N(t)$

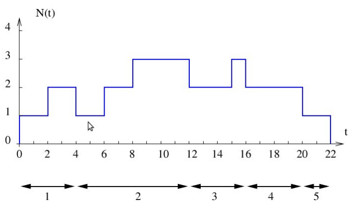


Figure : Nombre de clients [Nain 2003]

Attention

Le nombre de clients dans le système n'est pas la quantité de travail restant à fournir!

Modélisation discrète (suite)

- Temps de réponse (séjour): $r_n = d_n - a_n$
- Remarque: $r_n \geq \sigma_n$
- Charge (workload/backlog) $W(t)$ dépend des temps de service.
- Busy period: lorsque $W(t) > 0$ et $N > 0$.

Pour un système FIFO :

$$d_n = a_n + W(a_n) + \sigma_n$$

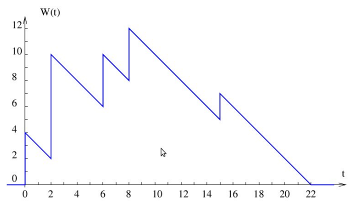


Figure : Exemple de courbe de charge [Nain 2003]

Courbes de charge (exemple)

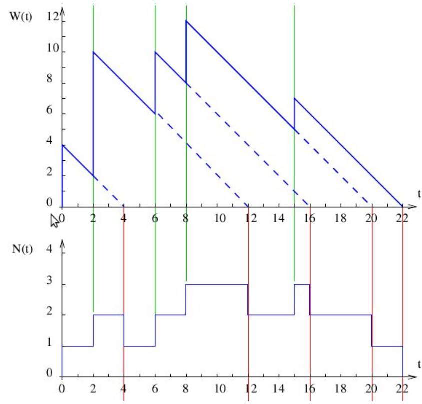


Figure : Courbe de charge [Nain 2003]

Stabilité

On définit également le taux d'occupation (ou d'utilisation) du système:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Attention: les définitions de λ et μ varient d'un système à l'autre.

Stabilité

Dans une file G/G/c (à c serveurs), le système est stable ssi $\rho < c$ (sauf D/D/c).