

# Problèmes de Muntz, Goyal et Carrasco: présentation et modélisation par des RAS

A. Bušić and J. M. Fourneau

*PRiSM, Université de Versailles*

*jmf@prism.uvsq.fr*

## Plan

- Cadre général
- Description du modèle
- Modélisation par des RAS

## Cadre général

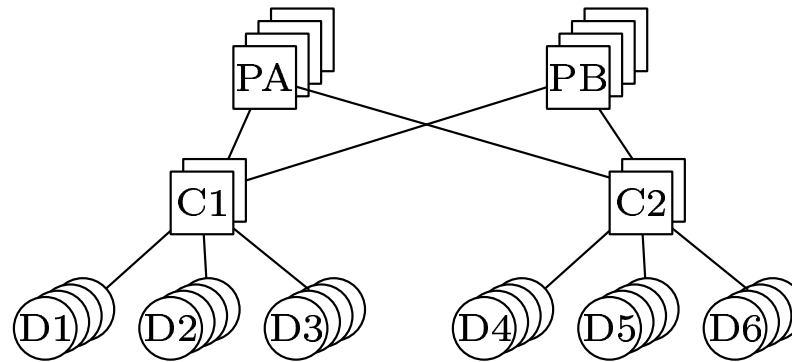
Des problèmes de disponibilité pour des systèmes à plusieurs composants de types différents.

- Les composants de même type ne sont pas différenciés.
- Des pannes et des réparations
  - simples ou multiples
  - les pannes exponentielles, les réparations exponentielles ou PH
  - une discipline de service pour les réparations
  - les réparations peuvent être prioritaires  
(en cas de PH, resume ou restart)
  - il peut y avoir plusieurs réparateurs
  - plusieurs modes de pannes (Soft, Hard); la réparation dépend du mode de la panne

- Représentation du système par le nombre de composants en panne dans chaque mode.
- Les états UP (système opérationnel) : un nombre minimal de composant en marche dans chaque type
  - en grand nombre mais en très faible proportion par rapport au nombre total d'état (la chaîne est très grande)

## Description du modèle

Muntz et al. 1989, Carrasco 1999



- Les composants

- Processeurs : 2 types ( $PA$  et  $PB$ ) (attention : pas indépendants !)  
4 processeurs de chaque type : un seul processeur par type fonctionne, les autres sont là en cas de pannes.
- Contrôleurs : 2 types ( $C1$  et  $C2$ ); 2 contrôleurs de chaque type.
- Disques : 6 piles de 4 disques.  $D1$ ,  $D2$  et  $D3$  liées aux contrôleurs  $C1$ , et les piles  $D4$ ,  $D5$  et  $D6$  aux contrôleurs  $C2$ .

- Les états UP :
  - au moins un processeur en activité ( $PA$  ou  $PB$ )
  - au moins un contrôleur en activité pour chaque type ( $C1$  et  $C2$ )
  - au plus un disque en panne par pile
- Les pannes et les réparations :
  - 2 modes de pannes : Soft et Hard; pour chaque type de composant
  - une seule réparation à la fois, le choix uniforme
  - les pannes simples (un seul objet à la fois) sauf la panne du processeur  $PA$  qui peut entraîner la panne du processeur  $PB$
  - seul le processeur en activité peut tomber en panne
  - les taux de pannes dépendent du type du composant et du mode de la panne

## Modélisation par des RAS

Attention : les fonctions sont de vraies fonctions et ne respectent pas la syntaxe de PEPS.

### Les processeurs

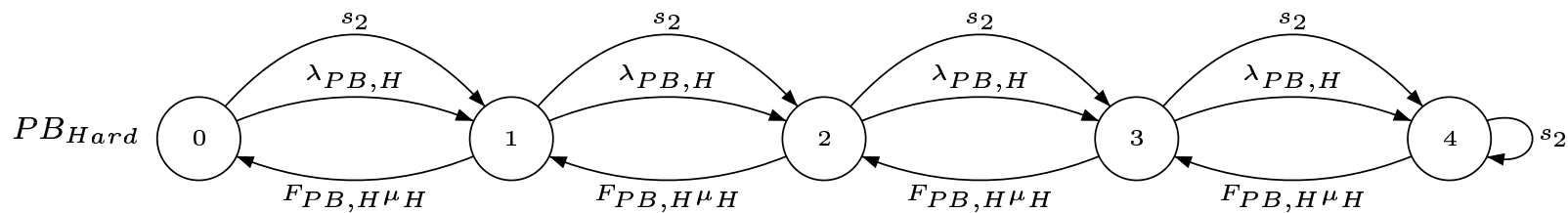
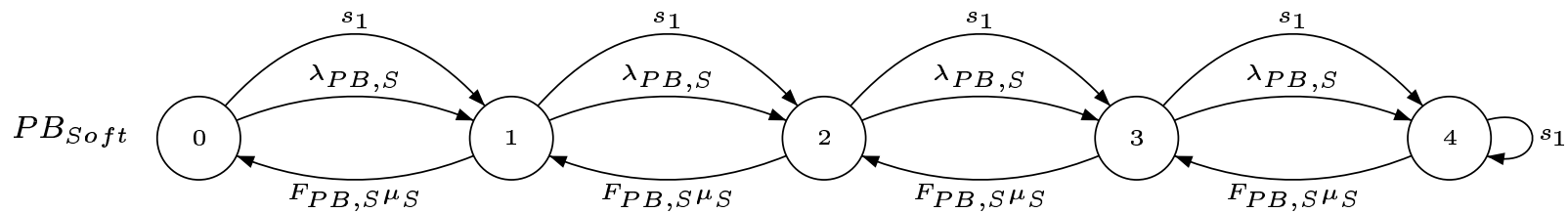
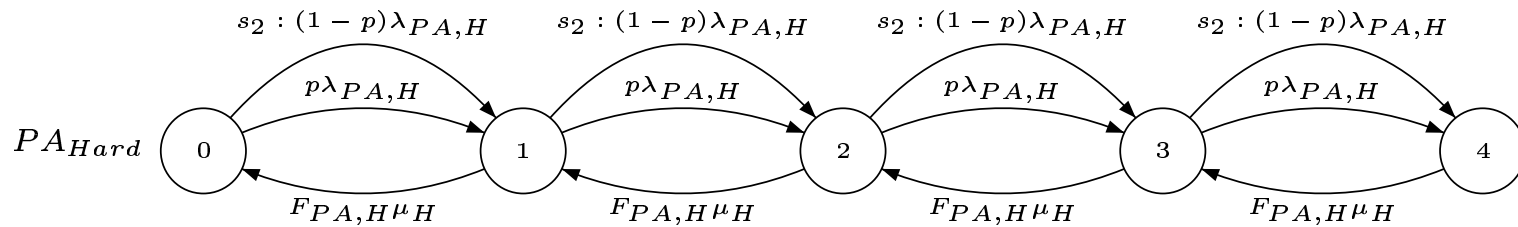
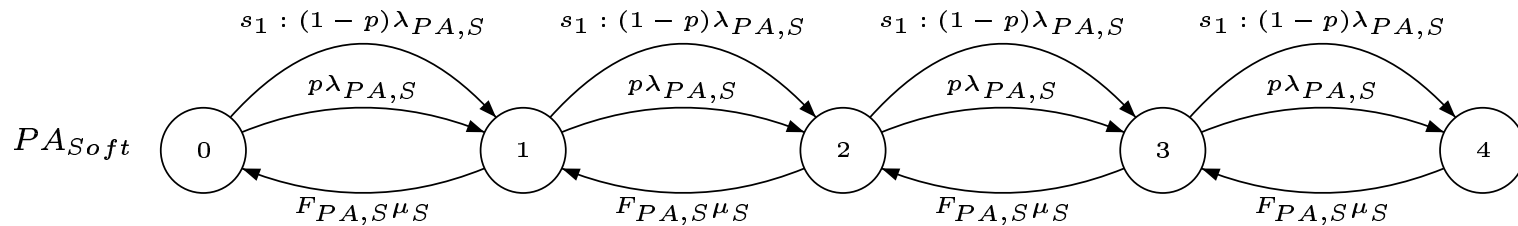
- Inactif, Actif, Panne Soft, Panne Hard
- suffisant de connaître le nombre de processeurs en Panne Soft et Panne Hard (par type)

Nombre de  $PA$  en activité : 1 si  $PA_{Soft} + PA_{Hard} \leq 3$ , 0 sinon.

Nombre de  $PA$  inactif :  $(3 - PA_{Hard} - PA_{Soft})^+$ .

- 4 automates :  $PA_{Soft}$ ,  $PA_{Hard}$ ,  $PB_{Soft}$  et  $PB_{Hard}$

Chaque automate possède 5 états (de 0 à 4).





Les contraintes d'admissibilité :

$$PA_{Soft} + PA_{Hard} \leq 4 \quad \text{et} \quad PB_{Soft} + PB_{Hard} \leq 4$$

→ des taux fonctionnels.

Remarque : 15 configurations atteignables (parmi 25).

Utiliser un seul automate par type de processeur?

$$f(u, v) := \mathbf{1}_{u+v < 4}$$

**Les transitions :**

- Les pannes simples de  $PA$  :
  - Soft : une transition locale fonctionnelle de taux  $p\lambda_{PA,S}f(PA_{Soft}, PA_{Hard})$ .
  - Hard : une transition locale fonctionnelle de taux  $p\lambda_{PA,H}f(PA_{Soft}, PA_{Hard})$ .
- Les pannes simples de  $PB$

- Les pannes doubles

- Soft double (transition synchronisée) : une panne Soft sur  $PA$  qui provoque le même mode de panne sur  $B$ .

- Le taux :  $(1 - p)\lambda_{PA,S}f(PA_{Soft}, PA_{Hard})$ .

- Hard double (transition synchronisée) : une panne Hard sur  $PA$  qui provoque le même mode de panne sur  $B$ .

- Le taux :  $(1 - p)\lambda_{PA,H}f(PA_{Soft}, PA_{Hard})$ .

Attention : les pannes doubles ne sont pas détaillées dans Muntz et Goyal, 1989.

Ici : une panne de PA provoque la panne du même type sur PB.

Possible de considérer tout les quatre cas et leur probabilités.

- Les réparations (transitions locales) :

Taux :  $F_{t,m}() \mu_m()$ , où

- $\mu_m$  = le taux de réparation du réparateur pour le type de panne  $m$ ; varie selon que le système est UP ou DOWN.

$$\mu_m() = \mu_{m,UP} System() + \mu_{m,DOWN} (1 - System())$$

La fonction  $System()$  retourne 1 si le système est UP et 0 sinon.

$$\begin{aligned} System() = & (1_{PA_{Soft}+PA_{Hard}+PB_{Soft}+PB_{Hard} \leq 7}) \\ & \times (1_{C1 \leq 2} \times 1_{C2 \leq 2}) \times \left( \prod_{x=1..6} 1_{Dx \leq 2} \right) \end{aligned}$$

–  $F_{t,m}()$  = la probabilité de choisir une composante de ce type  $t$  et avec le mode de panne  $m$ .

$NPanne(x,y)$  = le nombre de panne de type  $y$  sur la composante  $x$ .

Simple pour les processeurs, par exemple

$$NPanne(PA, Soft) = PA_{Soft}.$$

$$F_{PA,S}() = \frac{NPanne(PA, Soft)}{\sum_{x \in \{PA, PB, C1, C2, D1, \dots, D6\}} \sum_{y \in \{Soft, Hard\}} NPanne(x, y)}$$

## Les contrôleurs

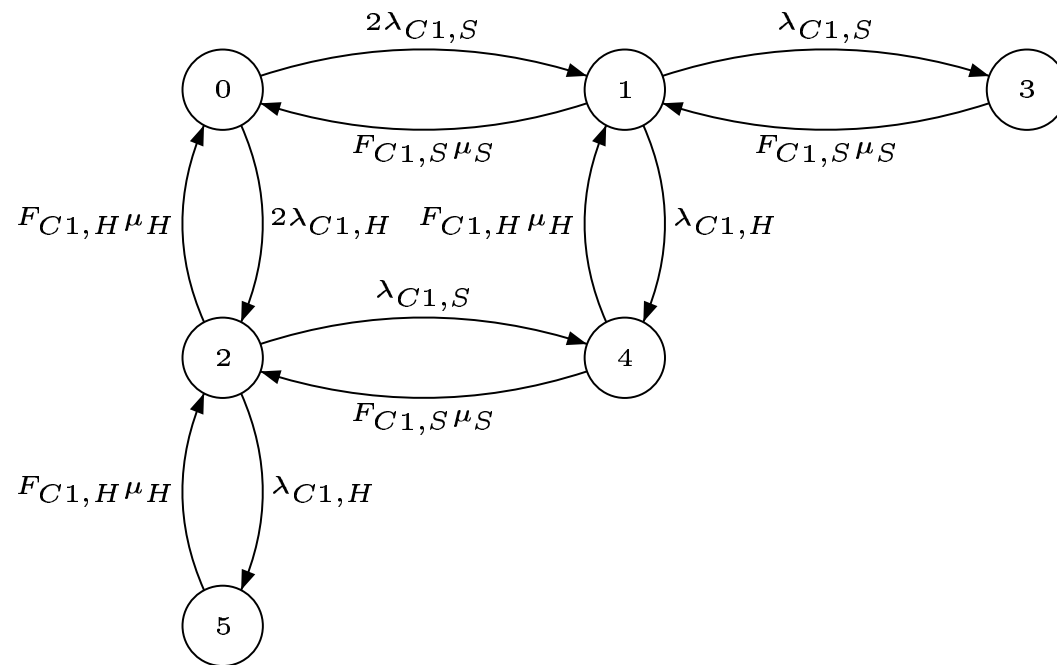
- Actif, Panne Soft, Panne Hard
- 2 automates (C1 et C2); les états  $(x, y)$  où  
 $x =$  nombre de pannes Soft,  $y =$  nombre de pannes Hard  
→ 6 états:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 2)$  (numérotés de 0 à 5)

4 transitions : réparations et pannes pour les modes Soft et Hard.

- Les pannes - transitions locales de taux fixes.  
Le taux :  $\lambda_{t,m}$  où  $t =$  type de contrôleur,  $m =$  le type de panne.
- Les réparations - transitions locales de taux fonctionnel  
Taux :  $F_{t,m}() \mu_m()$  avec

$$NPanne(C1, Soft) = 2 \times 1_{C1=3} + 1_{C1=1} + 1_{C1=4}$$

$$NPanne(C1, Hard) = 2 \times 1_{C1=5} + 1_{C1=2} + 1_{C1=4}$$



## Les disques

On modélise chaque pile isolée  $\rightarrow$  6 automates.

Etats :  $(x, y)$  où  $x$  = le nombre de panne Soft,  $y$  = nombre de panne Hard.

L'automate a 15 états numérotés de 0 à 14 :

0	1	2	3	4	5	6	7
(0,0)	(1,0)	(0,1)	(2,0)	(1,1)	(0,2)	(3,0)	(2,1)
8	9	10	11	12	13	14	
(1,2)	(0,3)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)	

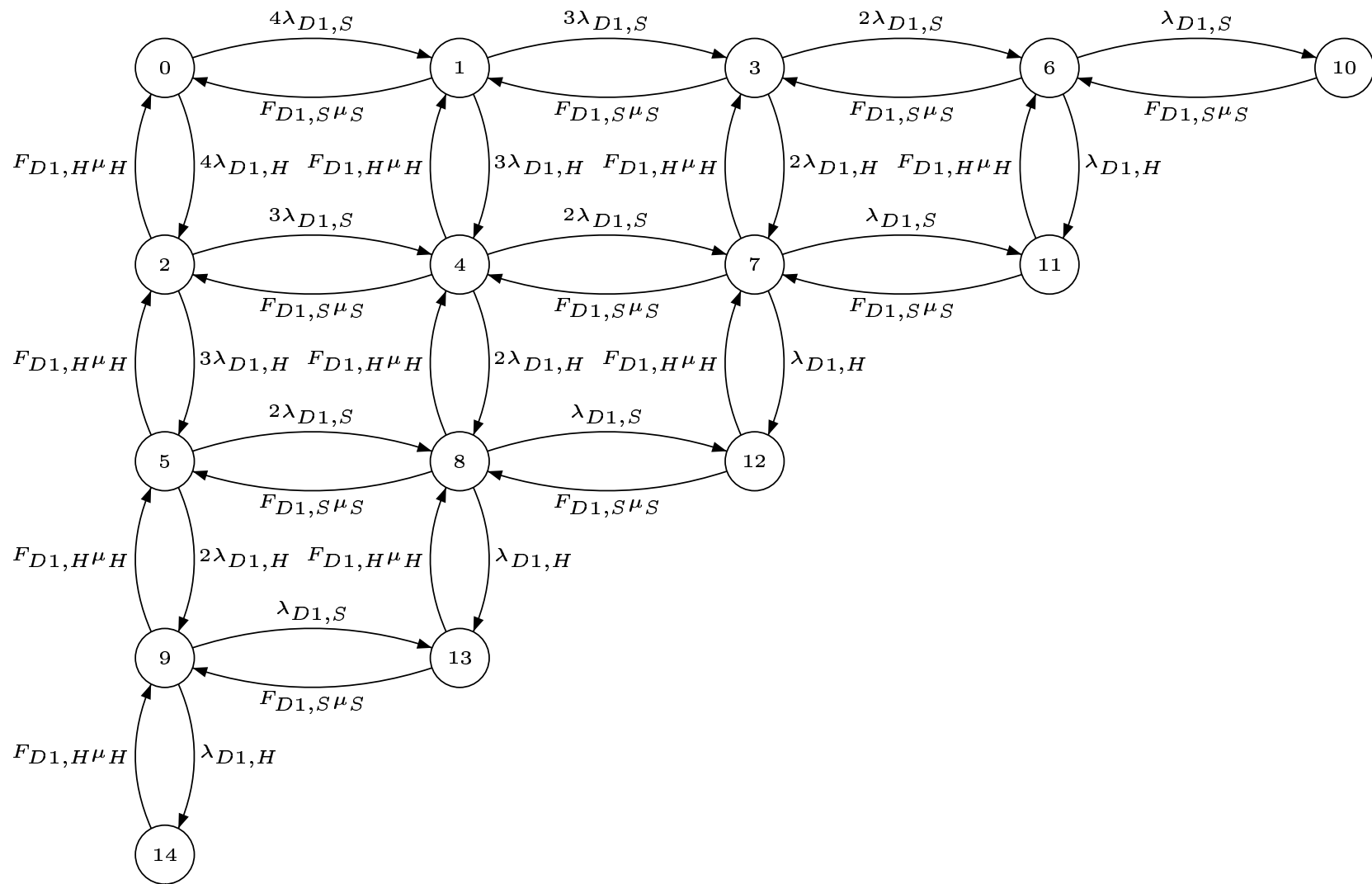
Les pannes - des événements locaux et de taux fixe  $\lambda_{t,m}$   
( $t$  = la pile de disque,  $m$  = le type de panne).

Les réparations - des transitions locales de taux fonctionnels.

$$\begin{aligned}
NPanne(D1, Soft) &= 4 \times 1_{D1=10} \\
&+ 3 \times 1_{D1=6} + 3 \times 1_{D1=11} \\
&+ 2 \times 1_{D1=3} + 2 \times 1_{D1=7} + 2 \times 1_{D1=12} \\
&+ 1_{D1=1} + 1_{D1=4} + 1_{D1=8} + 1_{D1=13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
NPanne(D1, Hard) &= 4 \times 1_{D1=14} \\
&+ 3 \times 1_{D1=9} + 3 \times 1_{D1=13} \\
&+ 2 \times 1_{D1=5} + 2 \times 1_{D1=8} + 2 \times 1_{D1=12} \\
&+ 1_{D1=2} + 1_{D1=4} + 1_{D1=7} + 1_{D1=11}
\end{aligned}$$





## Les valeurs numeriques des taux

Les deux types de panne (Soft et Hard) arrivent avec la même probabilité.

Les valeurs numeriques des taux (en  $h^{-1}$ ) :

$$\lambda_{t,S} = \lambda_{t,H} = 0.5\lambda_t, \forall t,$$

avec les constantes  $\lambda_t$  :

$\lambda_{PA} = \lambda_{PB} = \lambda_{C1}$	$\lambda_{C2}$	$\lambda_{D1}$	$\lambda_{D2}$	$\lambda_{D3}$	$\lambda_{D4}$	$\lambda_{D5}$	$\lambda_{D6}$
1/2000	1/4000	1/6000	1/8000	1/10000	1/12000	1/14000	1/16000

La panne du  $PA$  entraine la panne du  $PB$  avec la probabilité 0.1 ( $p = 0.9$ ).

Les réparations sont 10 plus rapides quand le système est DOWN :

$$\mu_{m,DOWN} = 10\mu_{m,UP}, m \in \{Soft, Hard\}.$$

$\mu_{Soft,UP}$	$\mu_{Hard,UP}$
0.1	0.05

## Taille du problème

Sans regroupement pour les processeurs, on a un espace d'états produit de taille gigantesque obtenu comme suit:

- Pour les processeurs :  $5^4$
- Pour les contrôleurs :  $6^2$
- Pour les disques :  $15^6$

En utilisant un seul automate par type de processeur  $\rightarrow 15^2$  au lieu de  $5^4$  (tous les états atteignables).

La taille :  $6^2 \times 15^8$ , soit un peu plus de 92 milliards d'états.

Impossible de générer un tel modèle, même sur disque :

le degré moyen de 11  $\rightarrow 10^{12}$  transitions;

10 octets par transition (structure creuse)  $\rightarrow$  l'ordre de grandeur de  $10^{13}$  octets.

Faible pourcentage d'états UP :

- Pour un disque, il y a 3 états UP parmi les 15 états possibles
- Pour les contrôleurs, il y a 3 états UP parmi les 6 états possibles
- pas de réduction triviale pour les processeurs.

→ au plus  $15^2 \times 3^2 \times 3^6 = 1476225$  états UP

Sur les 225 ( $= 15^2$ ) états utilisés pour coder les deux ensembles de processeurs, 200 états correspondent à des états UP.

On a donc exactement 1300200 états UP

(vérifié en générant la matrice pour une analyse de fiabilité)