Bornes stochastiques ($\preceq_{st}$ et $\preceq_{icx}$) sur les distributions transitoires des chaînes de Markov

Nihal Pekergin

Laboratoire PRiSM, Université de Versailles

Mouad Ben Mamoun

Département Maths-Info, Université Mohammed V

email: {nih, mobe}@prism.uvsq.fr

Plan

- Introduction
- Comparaison stochastique
- Une classe particulière de chaînes de Markov-la classe $\mathcal{C}$
- Forme close pour le calcul des distributions transitoires des chaînes de la classe $\mathcal{C}$
- Calcul de bornes $\preceq_{st}$ et $\preceq_{icx}$ sur les distributions transitoires à travers la forme close
- Exemple numérique

Introduction

- Les indices de performances sont assez souvent basés sur le calcul des distributions transitoires et stationnaires des chaînes de Markov
- Explosion de la taille de l'espace d'états $\Longrightarrow$ Complexité numérique très élevée
- Plusieurs approches pour réduire la complexité dont **l'approche d'encadrements stochastiques**
  - **Idée :** Trouver un modèle "plus simple" qui fournit des bornes sur la distribution de probabilités de l'indice de performance considéré.
  - **Outil :** Utiliser les ordres stochastiques pour comparer les distributions de probabilités.

Notre approche

Encadrements stochastiques dans le même espace d'états avec une structure spécifique facilitant la résolution numérique

- Définition d'une classe particulière de matrices de transitions avec une forme close pour le calcul des distributions transitoires.
- Application des techniques de comparaisons stochastiques pour construire des matrices bornantes appartenant à cette classe.
- Utilisation de l'ordre stochastique croissant convexe ($\preceq_{icx}$) pour une meilleure qualité des bornes.

Ordres stochastiques

- Pour deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans un espace totalement ordoné E :

$$X \preceq_{\mathcal{F}} Y \iff Ef(X) \leq Ef(Y), \quad \forall\, f \in \mathcal{F}$$

  - $\mathcal{F}_{st}$ = fonctions croissantes
  - $\mathcal{F}_{icx}$ = fonctions croissantes convexes

- Remarque :

$$X \preceq_{st} Y \implies X \preceq_{icx} Y$$

Cas de l'espace d'états $E = \{1, \ldots, n\}$

- si $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ et $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ désignent les distributions de probabilités de X et Y, alors :

$$X \preceq_{st} Y \iff \textstyle\sum_{k=i}^{n} p_k \leq \sum_{k=i}^{n} q_k, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$X \preceq_{icx} Y \iff \sum_{k=i}^{n} (k-i+1)\, p_k \leq \sum_{k=i}^{n} (k-i+1)\, q_k, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

- Exemple :

$$p = (0.3, 0.2, 0.1, 0.4) \preceq_{st} q1 = (0.3, 0.1, 0.1, 0.5)$$

$$p = (0.3, 0.2, 0.1, 0.4) \preceq_{icx} q2 = (0.5, 0.0, 0.0, 0.5)$$

Monotonie stochastique

- Une matrice de transition P est $\preceq_{\mathcal{F}}$-monotone, si pour tous vecteurs de probabilités p et q,

$$p \preceq_{\mathcal{F}} q \implies pP \preceq_{\mathcal{F}} qP$$

- P est $\preceq_{st}$**-monotone**, si et seulement si, $P[i,*] \preceq_{st} P[i+1,*] \;\; \forall\, i$

  Exemple : $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$

- P est $\preceq_{icx}$**-monotone**, si et seulement si, $\forall \;\; j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ la fonction $f_j(i) = \sum_{k=j}^{n} (k-j+1) p_{i,k}$ est croissante et convexe en i

Comparaison des chaînes de Markov

Soient $\{X(n),\ n \geq 0\}$ et $\{Y(n),\ n \geq 0\}$ deux chaînes de Markov homogènes de matrices de transition, P et Q. Si

- $X(0) \preceq_{\mathcal{F}} Y(0)$
- **Comparaison** $P \preceq_{\mathcal{F}} Q \quad (\Longleftrightarrow P[i,*] \preceq_{\mathcal{F}} Q[i,*] \ \ \forall\ i)$
- **Monotonie** P ou Q est $\preceq_{\mathcal{F}}$-monotone.

alors

$$\{X(n)\} \ \preceq_{\mathcal{F}} \ \{Y(n)\}$$

Si les distributions stationnaires π_X et π_Y existent, alors

$$\pi_X \preceq_{\mathcal{F}} \pi_Y$$

Une classe particulière de chaînes de Markov-la classe $\mathcal{C}$

Une matrice stochastique $P = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ appartient à la classe $\mathcal{C}$, si pour chaque colonne j, il existe une constante réelle c_j telle que:

$$p_{i+1,j} = p_{i,j} + c_j, \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

ce qui est équivalent à:

$$p_{i,j} = p_{1,j} + (i-1)\, c_j, \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

Exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0.15 & 0.45 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = -0.1,\ c_2 = 0.05\ , c_3 = 0.05, \quad \sum_{j=1}^{n} c_j = 0$$

Propriétés des matrices de la classe $\mathcal{C}$

- **Forme close pour le calcul de la distribution stationnaire**

$$\pi_j = p_{1,j} + \alpha \; c_j, \quad \alpha = \frac{\sum_{k=1}^{n} k \; p_{1,k} - 1}{1 - \sum_{k=1}^{n} k \; c_k}$$

- **Monotonie**

$P \preceq_{st}$ -monotone $\Longleftrightarrow \sum_{k=j}^{n} \; c_k \geq 0, \; \forall$colonne j

$P \preceq_{icx}$ -monotone $\Longleftrightarrow \sum_{k=j}^{n} (k - j + 1) \; c_k \geq 0, \; \forall j$

Puissances d'une matrice de la classe $\mathcal{C}$

Soit P est une matrice de transition de la classe $\mathcal{C}$ définie avec les constantes c_j. Soient a et b les constantes égales à :

$$a = \sum_{k=1}^{N}(k-1)c_k, \quad b = \sum_{k=1}^{N}(k-1)p_{1,k}$$

Les matrices de transitions $P^n, n \geq 2$ appartiennent également à la classe $\mathcal{C}$ et elles peuvent être calculées explicitement comme suit :
si $Q = P^n$, alors

$$q_{i,j} = q_{1,j} + a^{n-1}\ (i-1)\ c_j, \qquad \forall\, i,j \in \{1,\ldots,N\}$$

$q_{1,j}$ est donné par :

$$q_{1,j} = p_{1,j} + bc_j \ \sum_{k=1}^{n-2} a^k$$

Distributions transitoires des matrices de la classe $\mathcal{C}$

Soit $\{X(n),\ n \geq 0\}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Notons par $\pi^n = (\pi_1^n, \ldots, \pi_N^n)$ la distribution de $X(n)$.

Si P appartient à la classe, alors à tout instant $n \geq 0$,

$$\pi_j^n = p_{1,j} + \alpha_n\ c_j, \qquad \forall\ j \in \{1, \ldots, N\}$$

où α_n est une constante donnée par :

$$\alpha_n = b\ \sum_{k=1}^{n-2} a^k + c\ a^{n-1}$$

a,b, c sont les constantes défines par:

$$a = \sum_{k=1}^{N}(k-1)c_k, \quad b = \sum_{k=1}^{N}(k-1)p_{1,k}, \quad c = \sum_{k=1}^{N}(k-1)\pi_k^0$$

Construction de matrices bornantes de la classe $\mathcal{C}$

- Pour P irréductible on construit la matrice Q telle que:
  $Q \in C$, Q $\preceq$-monotone, $P \preceq (\succeq) Q$, Q stochastique

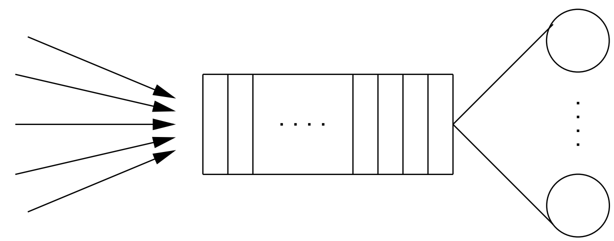
  Cas de l'ordre $\preceq_{icx}$

  Déterminer $q_{1,j}$ et c_j récursivement de $j = n$ à $j = 1$ en satisfaisant:

  - $\sum_{k=j}^{n} (k - j + 1)\, c_k \geq 0$
  - $\forall$ligne $i, \sum_{k=j}^{n} (k-j+1)\, p_{i,k} \leq \sum_{k=j}^{n} (k-j+1)\, (q_{1,k} + (i-1)\, c_k)$
  - $\forall$ligne $i,\ q_{1,j} + (i-1)\, c_j \geq 0 \quad$ et $\quad \sum_{k=j}^{n} (q_{1,k} + (i-1)\, c_k) \leq 1$

- Calcul des distributions bornantes par la forme close de la classe $\mathcal{C}$

Exemple numérique



Paramètres:

S: Nombre de serveurs.

B: Taille du système.

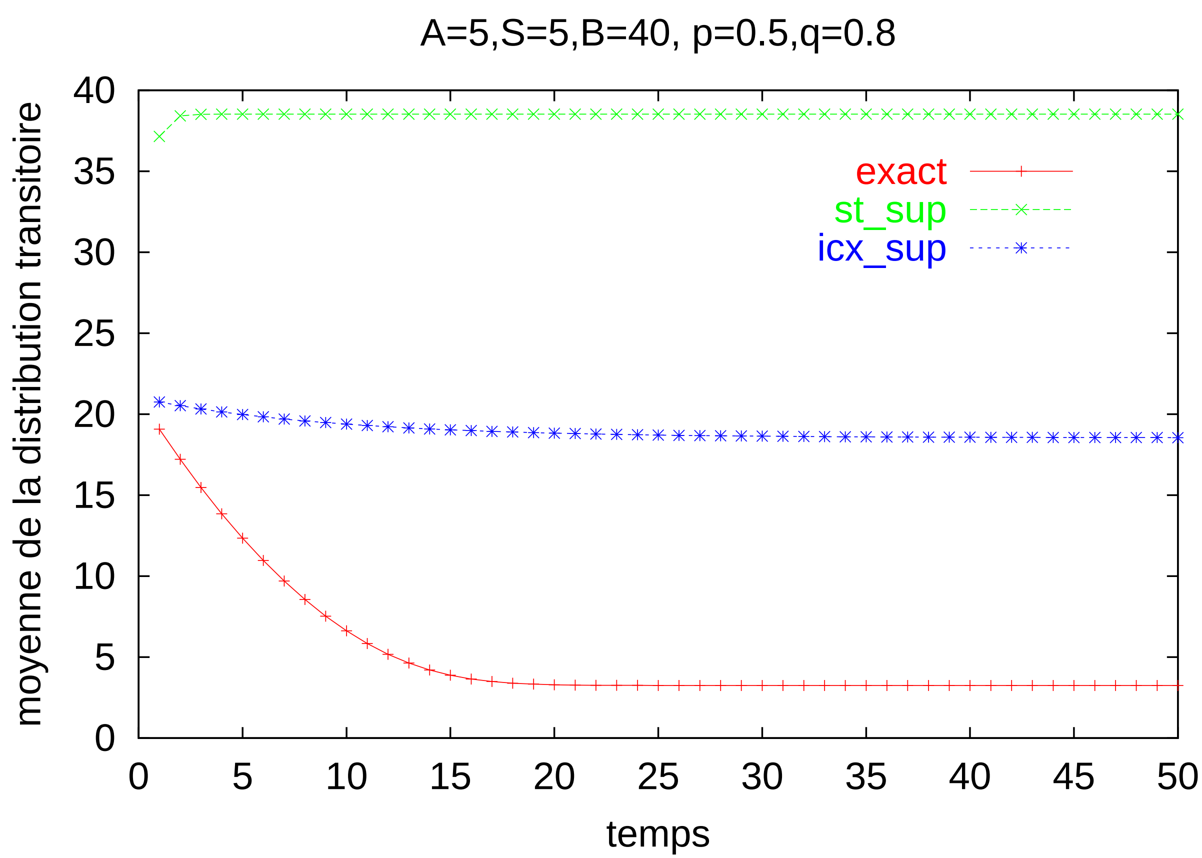
A: Taille maximale d'une rafale.

p: $Prob(\text{taille d'une rafale} = i) = (1-p)p^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq A.$

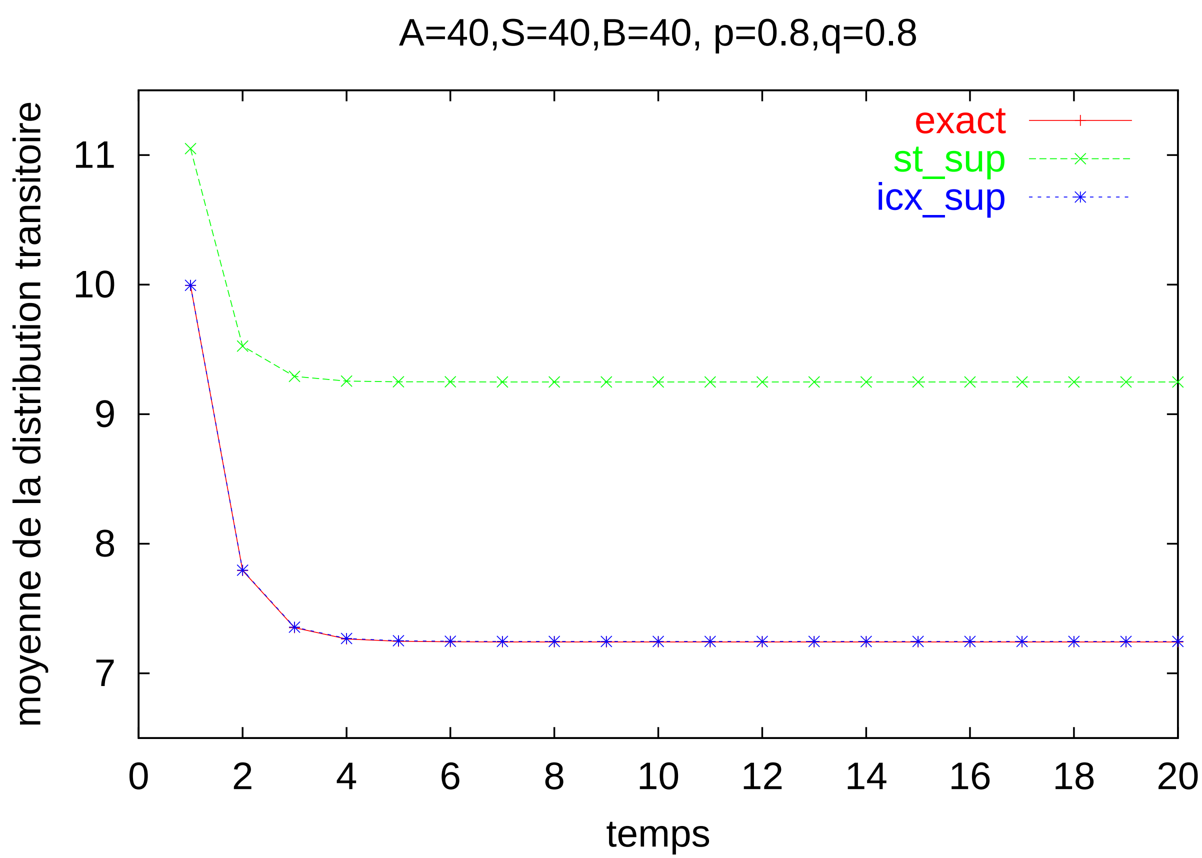
q: Temps de service géométriquement distribué

$Prob(\text{service} = i \text{ slots}) = (1-q)^{i-1}q.$

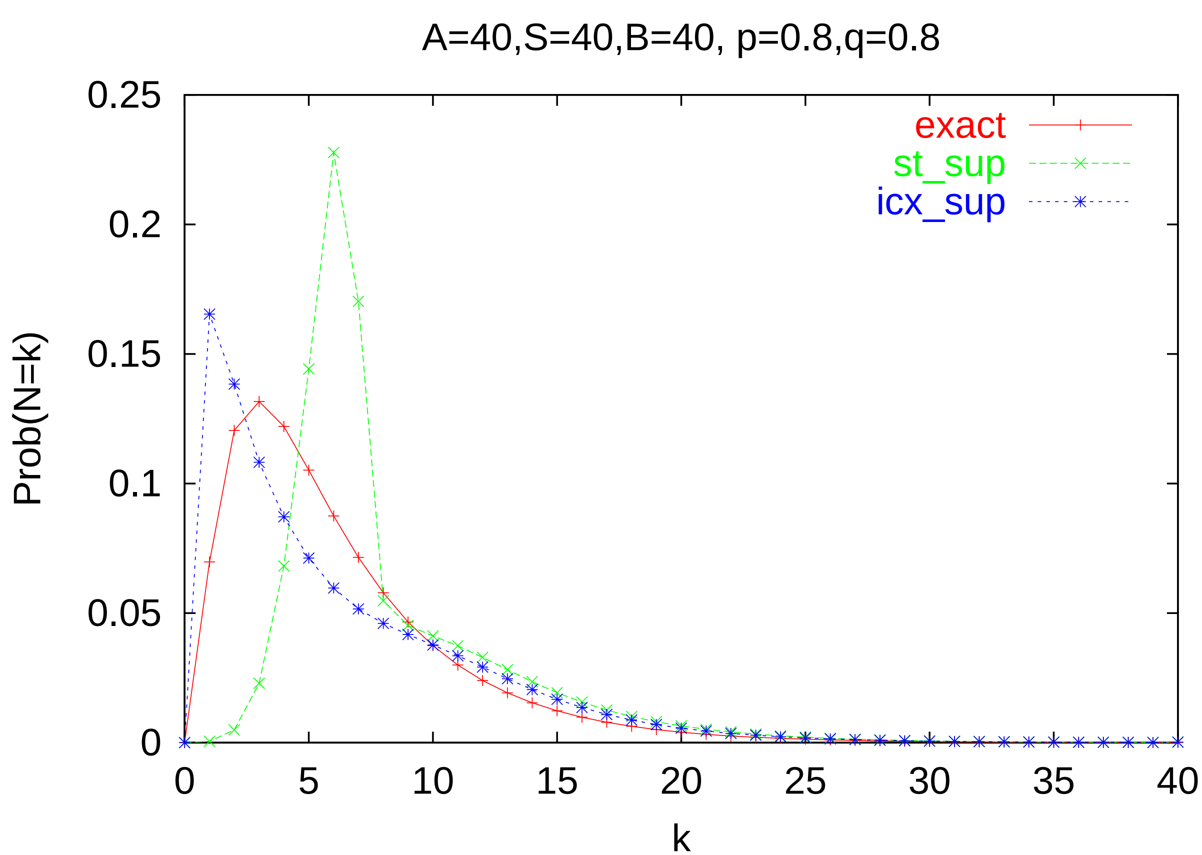
Exemple avec une matrice creuse



Exemple avec une matrice pleine



Exemple avec une matrice pleine



Comparaison des distributions à l'instant t=5