Pattern-based bounding algorithm

A. Busic, J. M. Fourneau

Laboratoire PRiSM

Université de Versailles

email: {abusic, jmf}@prism.uvsq.fr

14 Octobre 2004

Plan

- Rappels sur la comparaison stochastique
- Bornes stochastiques : approche algorithmique
- Généralisation : algorithme pattern-based
- Exemples de patterns
- Implémentation
- Conclusion

Ordres stochastiques

- **Définition** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans un espace totalement ordonné.

$$X \preceq_{\mathcal{F}} Y \;\Leftrightarrow\; E[f(X)] \leq E[f(Y)],\; f \in \mathcal{F}$$

  à condition que les espérances existent.

- L'ordre stochastique fort $\preceq_{st}$ est généré par la classe des fonctions croissantes.

- Propriété : $X \preceq_{st} Y \Leftrightarrow F_X \geq F_Y$, F_X et F_Y fonctions de répartition de X et Y.

- Caractérisation de l'ordre st pour l'espace d'états fini, $E = \{1, 2, \ldots, n\}$:

  Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et les vecteurs de distribution p_X et p_Y, alors

$$X \preceq_{st} Y \iff \sum_{k=j}^{n} p_X(k) \leq \sum_{k=j}^{n} p_Y(k),\ j = 1, \ldots, n.$$

- Exemple :

$$(0.4, 0.1, 0.2, 0.3) \preceq_{st} (0.4, 0.1, 0.1, 0.4)$$

$$(0.4, 0.1, 0.2, 0.3) \not\preceq_{st} (0.4, 0.2, 0.1, 0.3)$$

Comparaison des chaînes de Markov

- Restriction : DTMC avec l'espace d'états fini $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, totalement ordonné.
- **Comparaison des matrices des transitions**

  Définition Soient P et Q deux matrices stochastiques de même taille:

$$P \preceq_{st} Q \iff P_{i,*} \preceq_{st} Q_{i,*} \; \forall i.$$

- **Monotonie**
  - **Définition** Une matrice stochastique P est st-monotone si et seulement si pour tout les u et v,

$$u \preceq_{st} v \Rightarrow uP \preceq_{st} vP.$$

  - Caractérisation : Une matrice stochastique P est st-monotone si et seulement si pour chaque $i < n$, $P_{i,*} \preceq_{st} P_{i+1,*}$

Théorème Soient $\{X(n),\ n \geq 0\}$ et $\{Y(n),\ n \geq 0\}$ deux DTMC homogènes avec les matrices de transitions P et Q. Si

- $X(0) \preceq_{st} Y(0)$,
- au moins une des matrices P et Q est st-monotone,
- les matrices P et Q sont st-comparables, i.e., $P_{i,*} \preceq_{st} Q_{i,*}\ \ \forall i$,

alors

$$\{X(n)\} \preceq_{st} \{Y(n)\}.$$

Si les distributions stationnaires π_X et π_Y existent, alors

$$\pi_X \preceq_{st} \pi_Y.$$

Bornes stochastiques: approche algorithmique

- Problème: Pour une matrice de transitions P donnée trouver une matrice Q st-monotone et telle que $P \preceq_{st} Q$ (théorème $\Rightarrow$ comparaison des DTMC).

- Contraintes:

$$\begin{cases} \sum_{k=j}^{n} p_{i,k} \leq \sum_{k=j}^{n} q_{i,k}, & \forall\ i,j \quad (P \preceq_{st} Q) \\ \sum_{k=j}^{n} q_{i-1,k} \leq \sum_{k=j}^{n} q_{i,k}, & \forall\ i>1,j \quad (\text{st-monotonie de } Q) \end{cases} \tag{1}$$

- Algorithme de base : utiliser les égalités dans (1).

$$\begin{cases} \sum_{k=j}^{n} q_{1,k} = \sum_{k=j}^{n} p_{1,k} \\ \sum_{k=j}^{n} q_{i,k} = max(\sum_{k=j}^{n} q_{i-1,k}, \sum_{k=j}^{n} p_{i,k}) \quad \forall\ i>1,j \end{cases}$$

Algorithme de Vincent

données: matrice stochastique P

résultat : matrice stochastique Q, st-monotone, $P \preceq_{st} Q$

$q_{1,n} = p_{1,n}$;

for i=*2* **to** n **do** $q_{i,n} = \max(q_{i-1,n}, p_{i,n})$;

for j=n-*1* **to** *1* **do**

  $q_{1,j} = p_{1,j}$;

  for i=*2* **to** n **do**

    $q_{i,j} = \max(\sum_{k=j}^{n} q_{i-1,k}, \sum_{k=j}^{n} p_{i,k}) - \sum_{k=j+1}^{n} q_{i,k}$;

  end

end

Propriétés d'algorithme de Vincent

- L'algorithme intuitif.
- **Théorème** (Optimalité) Algorithme de Vincent donne la plus petite borne supérieure, st-monotone pour la matrice P, i.e. si U est une autre borne supérieure, st-monotone de P, alors $Q \preceq_{st} U$.

  (voir Abu-Amsha O., VincentJ.-M.: An algorithm to bound functionals of Markov chains with large state space. Int: 4th INFORMS Conf. on Tel., 1998.)
- La borne Q obtenue par cet algorithme peut être **réductible** même pour une matrice P irréductible.
- La résolution numérique de Q n'est pas plus simple que celle de P.

Algorithme IMSUB

- Rendre la borne irréductible (une solution):
  - garder les transitions dans le triangle supérieur et
  - imposer la sous diagonale strictement positive.
- **Théorème** Soit P une matrice stochastique irréductible. La borne obtenue par IMSUB est irréductible si et seulement si $p_{1,1} > 0$ et chaque ligne du triangle inférieur de la matrice P contient au moins un élément > 0.

données: matrice stochastique P; $\epsilon \in < 0, 1 >$

résultat : matrice stoch. Q, st-monotone, irréductible, $P \preceq_{st} Q$

$q_{1,n} = p_{1,n}$;

for *i=2* **to** n **do** $q_{i,n} = \max(q_{i-1,n}, p_{i,n})$;

for *j=n-1* **to** *1* **do**

 $q_{1,j} = p_{1,j}$;

 for *i=2* **to** n **do**

  $q_{i,j} = \max(0, \max(\sum_{k=j}^{n} q_{i-1,k}, \sum_{k=j}^{n} p_{i,k}) - \sum_{k=j+1}^{n} q_{i,k})$;

  if $(q_{i,j} = 0)$ *and* $(\sum_{k=j+1}^{n} q_{i,k} < 1)$ *and* $((p_{i,j} > 0)$ *or* $(i = j - 1))$ **then**

   $q_{i,j} = \epsilon \times (1 - \sum_{k=j+1}^{n} q_{i,k})$

  end

 end

end

Algorithmes imposant la forme de borne

- Algorithme de Vincent : utilisation des égalités.
  Sans égalités :
  - perte d'optimalité
  - possibilité d'imposer la forme de borne (réduire la complexité de la résolution numérique)
- Les formes utilisées : Upper-Hessenberg, Single Input Macro States, complément stochastique, . . .
- Utilisation des algorithmes spécifiques pour la résolution numérique.

Généralisation : approche des patterns

- Idée : faire un seul algorithme capable de créer la borne respectant la forme imposée.
- Données : la matrice stochastique P; la matrice T décrivant la forme souhaitée (pattern)
- Résultat : (si possible) une borne supérieure (dans le sens st) de P respectant la forme T; si une telle borne n'existe pas, l'algorithme envoie le message de non-compatibilité de P et T.

Pattern booléen

- Imposer la structure exacte de la borne (graphe de transitions).
- **Définition** Un **pattern booléen** est une matrice $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, $t_{i,j} \in \{0, 1\}$. La borne Q **respecte** le pattern T si et seulement si

$$\forall i, j,\ q_{i,j} > 0 \iff t_{i,j} = 1.$$

Un pattern est **compatible** avec une matrice de transition P si il existe au moins une borne Q st-monotone, $P \preceq_{st} Q$ telle que Q respecte le pattern T.

Algorithme pour construire la borne Q st-monotone, $P \preceq_{st} Q$ telle que Q respecte le pattern T. Idée:

- Créer une transition: prendre une partie du reste de la masse de probabilité dans la ligne traitée. (Attention: le reste doit être > 0.)
- Supprimer une transition: déplacer la masse à droite. (Attention: on doit avoir un 1 à droite.)

Pour un pattern T compatible avec la matrice P on obtient toujours une telle borne Q.

for $i = 1$ **to** n **do**

last = -1;

for $j = n$ **to** 1 **do**

if $(i > 1 \; and \; j < n)$ **then**

$temp = \max(0, \max(\sum_{k=j}^{n} q_{i-1,k}, \sum_{k=j}^{n} p_{i,k}) - \sum_{j=k+1}^{n} q_{i,k});$

else if $(i > 1)$ **then** $temp = \max(p_{i,n}, q_{i-1,n});$

else if $(j < n)$ **then** $temp = \max(0, \sum_{k=j}^{n} p_{1,k} - \sum_{k=j+1}^{n} q_{1,k});$

else $temp = p_{1,n};$

PATTERN BLOCK;

end

end

PATTERN BLOCK :

switch $t_{i,j}$ **do**

    case 0

        if $temp > 0$ **then**

            if $last > 0$ **then** $q_{i,last} = q_{i,last} + temp$;

            else STOP : non compatible!;

    case 1

        last = j;

        if $temp > 0$ **then** $q_{i,j} = temp$;

        else if $\sum_{k=j+1}^{n} q_{1,k} < 1$ **then** $q_{i,j} = \epsilon \times (1 - \sum_{k=j+1}^{n} q_{i,k})$;

        else STOP : non compatible!;

end

Pattern généralisé

- Comment inclure l'algorithme de base?

$\rightarrow$ Introduction du nouveau signe : *

$$t_{i,j} = * \;\Rightarrow\; \text{pas de condition supplémentaire sur } p_{i,j}$$

- La partie correspondante du PATTERN BLOCK :

case $*$

last = j;

$q_{i,j} = temp$;

end

- Autres lettres du pattern alphabet:
  - s (pas de suppression des transitions de P):

$$t_{i,j} = s \text{ et } p_{i,j} > 0 \;\Rightarrow\; q_{i,j} > 0$$

  - w (éviter de supprimer les transitions de P):

$$t_{i,j} = w \text{ et } p_{i,j} > 0 \;\Rightarrow\; q_{i,j} > 0 \text{ si possible}$$

- La partie correspondante du PATTERN BLOCK :

case s, w

  last = j;

  if $temp > 0$ **then** $q_{i,j} = temp$;

  else if $p_{i,j} > 0$ **then**

    if $\sum_{k=j+1}^{n} q_{1,k} < 1$ **then** $q_{i,j} = \epsilon \times (1 - \sum_{k=j+1}^{n} q_{i,k})$;

    else if $t_{i,j} = s$ **then** STOP : non-compatible!;

  end

Quelques patterns

Algorithme de Vincent : $t_{i,j} = *, \forall i, j$, i.e. $T = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix}$.

IMSUB : $t_{i,j} = \begin{cases} s, \ j \geq i \\ 1, \ j = i - 1 \\ w, \ j < i \end{cases}$, i.e. $T = \begin{bmatrix} s & s & \dots & s & s \\ 1 & s & \dots & s & s \\ w & 1 & \dots & s & s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w & w & \dots & 1 & s \end{bmatrix}$.

Upper-Hessenberg: $t_{i,j} = \begin{cases} s, \ j \geq i \\ 1, \ j = i-1 \\ 0, \ j < i \end{cases}$, i.e. $T = \begin{bmatrix} s & s & \dots & s & s \\ 1 & s & \dots & s & s \\ 0 & 1 & \dots & s & s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s \end{bmatrix}$.

Single Input Macro State Markov Chain

- Partition d'espace d'états en macro-états: chaque macro-état a un seul état d'entrée (les transitions entrant dans un macro-état doivent passer par son état d'entrée).
- Algorithme de calcul de la distribution stationnaire:
  Deux etapes:
  - résolution de chaque macro-état,
  - résolution de la chaîne composée que des états d'entrée.

  Feinberg et Chiu: A method to calculate steady-state distributions of large Markov chains by aggregating states. Oper. Res, V 35 (1987) 282–290.

Single Input Macro States Pattern:

$$
T = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
* & \ldots & * & * & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & 0 & \ldots & 0 & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
* & \ldots & * & * & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & 0 & \ldots & 0 & * \\
\hline
0 & \ldots & 0 & * & * & \ldots & * & * & \ldots & 0 & \ldots & 0 & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & * & * & \ldots & * & * & \ldots & 0 & \ldots & 0 & * \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
0 & \ldots & 0 & * & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * & \ldots & * & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & * & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * & \ldots & * & *
\end{array}\right].
$$

Complément stochastique

- Décomposition de Q en quatre blocks: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ A, B, C et D les matrices de taille $n_0 * n_0$, $n_0 * n_1$, $n_1 * n_0$ et $n_1 * n_1$ $(n_0 + n_1 = n)$. $\pi = (\pi_0\ \pi_1)$.
- Q irréductible $\Rightarrow I - D$ n'est pas singulaire.
- Calcul de la distribution stationnaire:

$$\begin{cases} \pi_0\ R = 0, \\ \pi_0\ r = 1, \\ \pi_1 = \pi_0\ H, \end{cases}$$

  où $H = B(I - D)^{-1}$, $R = I - A - HC$ et $r = e_0 + He_1$.
- Quessette: D triangulaire supérieur $\Rightarrow$ simplifier le calcul de H. $(I - D$ inversible si et seulement si $d_{i,i} < 1,\ \forall i.)$

- Pattern pour le complément stochastique avec le block D triangulaire supérieur donnant une borne irréductible (pour une matrice P compatible):

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc}
* & \cdots & * & * & 1 & * & \cdots & * & * \\
1 & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
* & \cdots & 1 & * & * & * & \cdots & * & * \\
\hline
* & \cdots & * & * & * & 1 & \cdots & * & * \\
* & \cdots & * & * & 0 & * & \cdots & * & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
* & \cdots & * & * & 0 & 0 & \cdots & * & 1 \\
* & \cdots & * & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & *
\end{array}\right].$$

Implémentation

- Utilise la représentation creuse des matrices (P, Q et T).
- Calcul ligne par ligne.
- Garde en mémoire 4 vecteurs creux (lignes actuelles de P, Q et T et la ligne précédante de Q.
- Temps de calcul (AMD Athlon 1 GHz; 128Mo):

Size	Trans. nb.	Imsub Patt.	SI Pattern		IMSUB [3]
			10 blocks	100 blocks	
251502	1005003	12.8s	16.4s	77.8s	18.3s
1003002	4010003	52.5s	66.5s	315.7s	72.9s

Conclusion

- Généralisation des algorithmes existants de calcul de bornes st.
- Pour imposer une nouvelle structure de borne il suffit de définir juste le pattern à la place d'écrire un nouvel algorithme.
- Introduction éventuelle d'autres lettres dans le pattern alphabet, imposant d'autres types de structure.
- Possible d'intégrer cet algorithme dans PEPS.
- Chercher les nouveaux patterns permettant de diminuer la complexité de la résolution numérique en respectant au maximum la forme de la matrice initiale (qualité de la borne).

References

[1] Abu-Amsha O., VincentJ.-M.: An algorithm to bound functionals of Markov chains with large state space. In: 4th INFORMS Conference on Telecommunications, Boca Raton, Florida, (1998)

[2] Feinberg B.N., Chiu S.S.: A method to calculate steady-state distributions of large Markov chains by aggregating states. In: Oper. Res, V 35 (1987) 282–290

[3] Fourneau J.M., Lecoz M., Quessette F.: Algorithms for an irreducible and lumpable strong stochastic bound. In: Linear Algebra and its Applications, V 386 (2004) 167–185

[4] Fourneau J.M., Quessette F.: Graphs and Stochastic Automata Networks. In: Proc. 2nd Int. Workshop on the Numerical Solution of Markov Chains, Raleigh, USA, (1995)

[5] Keilson J., Kester A.: Monotone matrices and monotone Markov processes. In: Stochastic Processes and Their Applications, V5 (1977) 231–241

[6] Linear Algebra and its Applications, V 386 (2004)

[7] Meyer C.D.: Stochastic complementation, uncoupling Markov chains, and the theory of nearly reducible systems. In: SIAM Review. V31 (1989) 240–272.

[8] Stewart W. J.: Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains. Princeton University Press, (1994)

[9] Stoyan D.: Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models. John Wiley & Sons, Berlin, Germany, (1983)