



# Un algorithme adaptatif optimal pour le calcul parallèle des préfixes

Jean Louis Roch, Daouda Traoré<sup>†</sup>

Equipe MOAIS (CNRS-INRIA-INPG-UJF)  
Laboratoire d'Informatique de Grenoble (LIG)  
51, Av. Jean Kuntzman, 38330 Montbonnot, France  
Jean-Louis.Roch@imag.fr, daouda.traore@imag.fr  
<sup>†</sup> *Ce travail est co-financé par une bourse France-Mali.*



**RÉSUMÉ.** Dans cet article, nous proposons un nouvel algorithme parallèle de calcul des préfixes pour des processeurs dont la vitesse ou le nombre peut varier en cours d'exécution. Basé sur le couplage récursif d'un algorithme séquentiel optimal et d'un algorithme parallèle non optimal mais récursif à grain fin, il exploite un ordonnancement dynamique de type vol de travail (Cilk, Kaapi). Sa performance théorique est analysée sur  $p$  processeurs à vitesses variables, de vitesse moyenne  $\Pi_{ave}$ . Bien que cet algorithme adaptatif est indépendant du nombre de processeurs, son temps d'exécution est équivalent à  $\frac{2n}{\Pi_{ave} \cdot (p+1)}$ , ce qui est optimal si les processeurs sont identiques (i.e.  $\Pi_{ave} = 1$ ). Expérimentalement, cet algorithme adaptatif est comparé à un algorithme optimal pour un nombre fixé  $p$  de processeurs identiques avec ordonnancement statique optimal sur une machine SMP octo-processeurs. Même pour des petites valeurs de  $n$  (100) et de  $p$  (de 1 à 8), ses performances sont analogues dans le cas où les processeurs sont dédiées au calcul, et il est beaucoup plus rapide dans le cas général où la machine exécute concurremment d'autres processus (cas multi-utilisateurs).

**ABSTRACT.** In this paper, we propose a new algorithm for parallel prefix computation for processors which number or speed may vary during execution. Based on the coupling of two algorithms,—one sequential, the other one parallel and fine grain—, it involves an on-line workstealing scheduling. Its theoretical performance is analyzed on  $p$  processors with variable speed, the average speed being  $\Pi_{ave}$ . While this adaptive algorithm is independent from the number  $p$  of processors, its execution time is equivalent to  $\frac{2n}{\Pi_{ave} \cdot (p+1)}$ , which is optimal when processors are identical (i.e.  $\Pi_{ave} = 1$ ). It has been experimented on an octo-processor SMP machine and compared to an optimal algorithm for a fixed number  $p$  of processors with an optimal off-line scheduling. Even for small values of  $n$  (100) and of  $p$  (1 to 8), its performances are analogous when the machine is dedicated to the computation, and it is faster when the machine concurrently executes other processes (multiuser case).

**MOTS-CLÉS :** algorithme parallèle, parallélisme, ordonnancement dynamique, vol de travail

**KEYWORDS :** parallel algorithm, parallelism, online scheduling, workstealing



---

## 1. Introduction

Etant donnés  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , les  $n$  préfixes  $\pi_k$ , pour  $1 \leq k \leq n$ , sont définis par  $\pi_k = x_0 \star x_1 \star \dots \star x_k$  où  $\star$  est une loi associative.

Le calcul des préfixes est une opération qui apparaît dans de nombreux algorithmes notamment l'évaluation de polynômes et les additions modulaires [3], le packing, la parallélisation des boucles [9].

Le calcul séquentiel itératif des préfixes requiert  $n$  opérations  $\star$ . Mais tout circuit parallèle de profondeur  $d$  requiert au moins  $2n - d$  opérations  $\star$  [4]. Le temps parallèle minimal est  $\Omega(\log n)$  sur une machine sans écriture concurrente. Ladner et Fischer proposent un algorithme parallèle [7] de temps  $2 \log n$  avec  $2n$  opérations ; Fich [4] montre que cet algorithme est asymptotiquement optimal car tout algorithme de temps  $\log n$  nécessite  $4n$  opérations. L'algorithme de Ladner-Fischer est à grain fin, indépendant du nombre de processeurs effectivement disponibles ; il peut être émulé sur  $p$  processeurs identiques en temps asymptotique  $\frac{2n}{p} + O(\log n)$  pour  $p < \frac{n}{\log n}$  mais effectue  $2n$  opérations donc n'est pas optimal.

Nicolau et Wang [9] montrent qu'une borne inférieure pour le temps parallèle sur  $p$  processeurs est supérieur à  $\left\lceil \frac{2n}{p+1} \right\rceil$  pour  $n \geq p(p+1)/2$  ; ils donnent un algorithme, basé sur une découpe en  $(p+1)$  blocs et un pipeline entre blocs, qui atteint cette borne. Pour  $n \gg p$ , cette borne est aussi atteinte par l'algorithme rappelé dans la section 3 de temps  $\frac{2n}{p+1} + O(p)$  et strictement optimal en nombre d'opérations. Les différentes implantations proposées, sur architectures distribuées ou circuits dédiés [3], dépendent toutes du nombre  $p$  de processeurs et d'un ordonnancement statique. L'inconvénient d'un algorithme optimal pour  $p$  processeurs fixé est que le nombre d'opérations est au moins  $2\frac{p}{p+1}$  fois supérieur au nombre  $n$  d'opérations de l'algorithme séquentiel.

Ces algorithmes, bien qu'optimaux sur  $p$  processeurs, ne sont pas performants si l'on dispose d'une machine avec des processeurs différents, ou d'une machine utilisée par plusieurs utilisateurs car la charge des processeurs varie au cours de l'exécution. Pour traiter ce problème, nous proposons dans cet article un nouvel algorithme de calcul de préfixes, dit à grain adaptatif. Il repose sur l'ordonnancement par vol de travail (§2) implémenté dans Kaapi [6] (*Kernel for Adaptive and Asynchronous Parallel Interface* : un intergiciel qui permet la programmation d'une application parallèle et distribuée, c'est aussi un moteur exécutif pouvant être utilisé comme machine cible pour des langages de haut niveau, pour plus de détail voir [8]) et étendu au cas de processeurs à vitesses variables par Bender et Rabin [1]. La section 4 présente le nouvel algorithme à grain adaptatif et analyse sa complexité dans le cas de processeurs identiques et de vitesses variables. Dans la section 6 nous présentons des comparaisons expérimentales entre cet algorithme et un algorithme optimal sur une machine octo-processeurs, dans les deux cas processeurs dédiés et processeurs perturbés par des processus additionnels ; conformément à l'analyse théorique, l'algorithme adaptatif est le plus rapide.

Le couplage proposé ici entre deux algorithmes complémentaires concurrents, l'un séquentiel et l'autre parallèle, est inspiré de [2] où il est appliqué à des algorithmes de même nombre d'opérations sur des processeurs identiques. Mais son utilisation pour des algorithmes de coûts différents (cas des préfixes) et des vitesses variables, ainsi que la technique utilisée pour analyser sa complexité sont originales. Très générales, nous pensons qu'elles peuvent s'appliquer à d'autres problèmes.

---

## 2. Notations et ordonnancement par vol de travail

Nous désignons par  $W_1$  le nombre total d'opérations effectuées par un algorithme parallèle ;  $W_\infty$  le chemin critique en nombre d'opérations de cet algorithme ;  $T_p$  le temps d'exécution de cet algorithme ordonnancé sur  $p$  processeurs. Pour ordonnancer un programme à parallélisme récursif sur un nombre fixé de processeurs, Cilk[5] et Kaapi [6] implémentent un algorithme distribué de type vol de travail, selon le principe "Travail d'abord" (work-first principle). Chaque processeur exécute localement, selon l'ordre séquentiel, les tâches qu'il a créées. Lorsqu'un processeur  $P_v$  devient inactif (il n'a plus de tâches prêtes), il choisit (uniformément au hasard) un autre processeur  $P_w$  qui a au moins une tâche prête. La tâche prête que  $P_w$  exécuterait en dernier est alors migrée sur  $P_v$  ; on parle de vol réussi. Kaapi [6] implémente cette migration par un algorithme distribué qui minimise la synchronisation entre processeur volé et processeur voleur. Le théorème suivant permet de donner un encadrement de  $T_p$  en fonction de  $W_1$  et  $W_\infty$ .

**Théorème 2.1** [5] Avec une grande probabilité ( i.e. pour tout  $c > 0$  et  $n$  assez grand, la probabilité est supérieure à  $1 - n^{-c}$ .) le nombre de vols réussis est majoré par  $O(pW_\infty)$  et le temps d'exécution  $T_p$  est majoré par

$$T_p \leq \frac{W_1}{p} + O(W_\infty)$$

Ainsi, si  $W_\infty$  est négligeable devant  $W_1$ , cet ordonnancement à une performance asymptotique  $\frac{W_1}{p}$  optimale.

Ce théorème est étendu dans [1] au cas de processeurs hétérogènes ou de vitesses différentes, non connues ou variables. La vitesse instantanée d'un processeur est mesurée en nombre d'opérations par top ; on note  $\Pi_{ave}$  la vitesse moyenne de l'ensemble des processeurs au cours de l'exécution. Au niveau du vol de travail, la seule modification est lorsque  $p_v$  vole du travail à un processeur actif  $p_w$  : si  $p_w$  est en cours d'exécution mais n'a pas de travail prêt à être volé et si  $p_v$  est beaucoup plus de  $\beta$  fois plus rapide que  $p_w$  alors la tâche en cours d'exécution sur  $p_w$  est préemptée et migrée sur  $p_v$ . Le temps d'exécution  $T_p$  est alors majoré par  $T_p \leq \frac{W_1}{p \cdot \Pi_{ave}} + O\left(\frac{\beta \cdot W_\infty}{\Pi_{ave}}\right)$ .

---

## 3. Algorithme parallèle sur $p$ processeurs identiques

Dans ce paragraphe, nous rappelons un algorithme parallèle pour le calcul des  $n$  préfixes  $(\pi_i)_{i=1, \dots, n}$  qui est optimal asymptotiquement sur  $p$  processeurs identiques. Il est basé sur une découpe en  $p + 1$  blocs  $B_0, \dots, B_p$  de même taille (à un élément près) des  $n + 1$  éléments en entrée  $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ . Pour simplifier, on suppose que chaque bloc  $B_i$  contient  $K = \frac{n}{p+1}$  éléments consécutifs sauf pour le bloc  $B_0$  qui contient  $k + 1$  éléments consécutifs (l'élément  $x_0$  de plus).

1) **Etape 1** : En parallèle pour  $i = 0, \dots, p - 1$ , on calcule sur le processeur  $i$  les préfixes séquentiels (les préfixes calculés séquentiellement) du bloc  $B_i$ . Soient  $\alpha_i$  le dernier préfixe du bloc  $B_i$ . On remarque que les préfixes  $(\pi_j)_{j=1, \dots, K}$  du bloc  $B_0$  sont ainsi calculés.

2) **Etape 2** : On calcule les  $p$  préfixes  $\beta_0 = \alpha_0, \beta_1 = \alpha_0 \star \alpha_1, \dots, \beta_{p-1} = \beta_{p-2} \star \alpha_{p-1}$  des valeurs  $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$ .

3) **Etape 3** : Sur le processeur 0, on calcule les préfixes des éléments  $\beta_{p-1}, B_p$  pour obtenir les préfixes  $\pi_{pK}, \dots, \pi_n$ . Et, en parallèle pour  $i = 1, \dots, p - 1$ , on calcule

sur le processeur  $i$  le produit par  $\beta_{i-1}$  de chaque préfixe du bloc  $B_i$  ; on remarque que ces produits sont tous indépendants, même si ils sont effectués ici en séquentiel. On obtient ainsi tous les préfixes  $\pi_i$ .

Le temps d'exécution de cet algorithme est  $2K + p - 1 \equiv \frac{2n}{p+1}$  donc asymptotiquement optimal. Son nombre d'opérations égal à  $p(K - 1) + 1 + p - 1 + pK = 2n - 2K$  est strictement optimal car il atteint la borne inférieure de Fich[4]. De plus, on remarque qu'en prenant  $K = 2$  et en exécutant de manière récursive l'étape 2, on retrouve l'algorithme de Ladner et Fisher [7] qui effectue  $W_1 = 2n$  opérations  $\star$  avec un chemin critique  $W_\infty = 2 \log_2 n$ .

Cependant, cet algorithme n'est pas adapté si les vitesses des processeurs ne sont pas identiques ou si le temps d'une opération varie. Le temps d'exécution de l'algorithme sera alors le temps de terminaison du processeur le plus lent. Dans la section suivante nous présentons un algorithme adaptatif qui atteint aussi un temps et un nombre d'opérations asymptotiquement optimal sur  $p$  processeurs mais qui s'adapte automatiquement à la vitesse des processeurs par vol de travail.

---

#### 4. Algorithme parallèle à grain adaptatif

Notre algorithme parallèle à grain adaptatif est basé sur le couplage d'une part d'un processus séquentiel  $P_s$  qui calcule séquentiellement des préfixes et d'autre part d'une variante de l'algorithme parallèle précédent, mais à grain fin, qui est ordonnancé par vol de travail sur  $p - 1$  autres processus  $P_v$ . Chacun de ces  $p$  processus est placé sur un processeur.

Initialement, le processus  $P_s$  démarre le calcul des préfixes de 1 à  $n$ . Soient  $a = \frac{n}{p+1}$  et  $b = \frac{p}{p+1}n$  ; les préfixes de 1 à  $a$  et de  $b$  à  $n$  seront calculés par ce processus  $P_s$ . Mais l'intervalle d'indices  $[a, b]$  peut être volé et découpé récursivement par les processus  $P_v$  devenus inactifs. Les algorithmes pour  $P_s$  et les processus  $P_v$  sont les suivants :

• **Algorithme séquentiel sur un processus  $P_s$  :**

1)  $P_s$  calcule séquentiellement les préfixes à partir de l'indice 1 (i.e.  $\pi_1$ ), jusqu'à atteindre un indice  $u_1$  tel que l'intervalle  $[u_1, u_2]$  d'indices a été volé par un processeur  $P_v$ .

2)  $P_s$  préempte alors  $P_v$  et récupère le dernier indice  $k \leq u_2$  calculé par  $P_v$ , qui a donc déjà calculé  $r_{u_1} = x_{u_1}, r_{u_1+1} = r_{u_1} \star x_{u_1+1}, \dots, r_k = r_{k-1} \star x_k$ .  $P_s$  envoie la valeur  $\pi_{u_1-1}$  à  $P_v$  et redémarre  $P_v$  (voir ci-dessous).

3)  $P_s$  calcule  $\pi_k = \pi_{u_1-1} \star r_k$  ; puis il reprend le calcul séquentiel des préfixes de  $k + 1$  à  $n$  à partir de  $k + 1$  en revenant à l'étape 1. On parle d'opération de saut ; pour chaque opération de saut,  $P_s$  effectue une opération  $\star$ .

4)  $P_s$  s'arrête lorsqu'il a calculé  $\pi_n$  (les préfixes d'indices de  $b$  à  $n$  ne peuvent pas être volés). Après avoir calculé  $\pi_n$ , il devient un processus voleur et exécute l'algorithme  $P_v$ .

• **Algorithme parallèle sur  $p - 1$  processus  $P_v$  :**

– Lorsqu'il est préempté par  $P_s$  (voir algorithme  $P_s$ ),  $P_v$  a déjà calculé localement des préfixes partiels  $r_{u_1}, \dots, r_{u_k}$  de l'intervalle  $[u_1, u_k]$ . Il reçoit alors la valeur du dernier préfixe  $\beta = \pi_{u_1-1}$  calculée par  $P_s$ . Il finalise alors l'intervalle  $[u_1, u_k]$  en calculant les produits  $\pi_i = \beta \star r_i$  pour  $u_1 \leq i \leq u_k$ . Ces produits sont parallèles ; sur inactivité d'un autre processus voleur, une moitié de ces calculs restant à faire sur  $P_v$  dans cet intervalle

peut alors être volée.

– Lorsqu’il est inactif, le processus  $P_v$  choisit au hasard un processeur jusqu’à trouver un processus actif  $P_w$ . Il peut s’agir soit de  $P_s$ , soit d’un autre processus voleur. Si la victime est  $P_s$ , le vol n’est possible que si  $P_s$  possède un intervalle d’indices compris entre  $a$  et  $b$  restant à calculer.

1)  $P_v$  découpe l’intervalle restant à calculer et volable sur  $P_w$  en deux parties ; il extrait la partie droite  $[u_1, u_2]$  de l’intervalle et la vole. La partie gauche reste en cours de calcul sur  $P_w$ .

2)  $P_v$  démarre le calcul sur l’intervalle volé  $[u_1, u_2]$ . Il peut s’agir : soit d’un calcul de préfixes locaux (i.e.  $r_{u_1} = x_{u_1}, r_{u_1+1} = r_{u_1} \star x_{u_1+1}, \dots$ ) ; soit de la finalisation de calculs de préfixes à partir de valeurs  $r_k$  déjà calculées (i.e.  $\pi_{u_1+1} = \pi_{u_1} \star r_{u_1+1}, \pi_{u_1+2} = \pi_{u_1} \star r_{u_1+2}, \dots$ ).

Le programme s’arrête lorsque tous les processeurs sont inactifs. L’intérêt de cet algorithme est qu’un processeur devenu lent sera soit préempté par le processus séquentiel, soit volé par un processus parallèle. La section suivante analyse la complexité de cet algorithme adaptatif.

---

## 5. Optimalité asymptotique de l’algorithme adaptatif

Le théorème suivant montre que l’algorithme de préfixe à grain adaptatif précédent est asymptotiquement optimal sur  $p$  processeurs identiques.

**Théorème 5.1** *Soit  $T_p$  le temps du calcul de  $n$  préfixes par l’algorithme adaptatif sur  $p$  processeurs identiques. Avec une grande probabilité :*

$$T_p \leq \frac{2n}{p+1} + O(\log n).$$

**Preuve.** On analyse l’exécution en la découpant en 2 phases.

– **phase 1** : Jusqu’à ce que le processeur  $P_s$  qui exécute la partie séquentielle de l’algorithme adaptatif termine avec le calcul du dernier préfixe  $\pi_n$ .

– **phase 2** : Après la phase 1 et jusqu’à la fin du calcul.

Soit  $n_{seq}$  (resp.  $j$ ) le nombre de préfixes (resp. sauts) calculés de manière séquentielle par  $P_s$  dans la phase 1. Soit  $x$  (resp.  $y$ ) le nombre de préfixes finaux calculés par les processus  $P_v$  (algorithme parallèle), dans la phase 1 (resp. phase 2). On a  $n = n_{seq} + j + x + y$ . On a  $W_1 = n_{seq} + 2x + 2y + 2j$ . Soit  $I_1$  (resp.  $I_2$ ) le nombre de tops d’inactivité dans la phase 1 (resp. 2). On a  $(n_{seq} + j)(p - 1) = 2x + y + j + I_1$  pour la phase 1. Soient  $T_p^{(1)}$  (resp.  $T_p^{(2)}$ ) le temps parallèle de la phase 1 (resp 2) ; on

$$a \begin{cases} T_p^{(1)} = n_{seq} + j = \frac{2x+y+j+I_1}{p-1} ; T_p^{(2)} = \frac{y+I_2}{p} \\ T_p = T_p^{(1)} + T_p^{(2)} \\ (p+1)T_p = 2n + j + \frac{y}{p} + (I_1 + I_2) + \frac{I_2}{p} \end{cases}$$

Le nombre de sauts  $j$  est inférieur au nombre vols effectués par les  $(p - 1)$  processeurs. Or les processus  $P_v$  exécutent un algorithme parallèle, avec découpe récursive sur vol de travail, donc de profondeur  $W_\infty \leq \log_2(n - n_{seq}) + 2 \leq \log_2 n$ . D’après le théorème 2.1, on en déduit qu’avec une grande probabilité,  $j \leq (p - 1) \log_2(n)$ . De plus, l’ordonnancement étant glouton durant les deux phases,  $I_1 + I_2 \leq pW_\infty \leq p \log_2(n)$ . On obtient donc  $j + (I_1 + I_2) + \frac{I_2}{p} \leq 2p \log_2(n)$ . Par ailleurs, dans la

phase 1 on a  $(p - 1)(n_{seq} + j) = 2x + y + j + I_1$  et  $x + y + j = n - n_{seq}$ . Puisque  $n_{seq} \geq \frac{2n}{p+1}$ , on obtient  $y \leq I_1 - pj \leq (p - 1) \log_2 n$ . Finalement, on a  $T_p \leq \frac{2n}{p+1} + 2 \log_2(n) + (\frac{p-1}{p(p+1)}) \log_2(n) + O(1)$  ce qui termine la preuve.  $\triangle$

Le cas de processeurs variables s'étudie similairement en décomposant le programme en deux phases et en dénombrant le nombre d'opérations dans chaque phase. Le théorème suivant suppose que la vitesse moyenne  $\Pi_{ave}$  du processus séquentiel est la même que celle  $\Pi_{ave}^{(1)}$  (resp.  $\Pi_{ave}^{(2)}$ ) des autres processeurs durant la phase 1 (resp.2). Cette hypothèse est réaliste si l'exécution est suffisamment longue et si les processeurs logiques sont ordonnancés de manière équitable sur les  $p$  processeurs physiques (cas de Linux par exemple). De plus, elle est cohérente pour une comparaison avec l'exécution séquentielle de l'algorithme, qui serait alors supposée prendre un temps  $\frac{n}{\Pi_{ave}}$ .

**Théorème 5.2** Soit  $T_p$  le temps du calcul de  $n$  préfixes par l'algorithme adaptatif sur  $p$  processeurs de vitesse globale moyenne  $p \cdot \Pi_{ave}$ . Alors, avec une grande probabilité :

$$T_p \leq \frac{2n}{(p+1)\Pi_{ave}} + \frac{O(\log_2 n)}{\Pi_{ave}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(p+1)\Pi_{ave}}.$$

La preuve de ce théorème, similaire à la preuve précédente, n'est pas détaillée. Elle utilise l'ordonnancement par vol de travail modifié décrit en section 2 [1].

En conclusion, en comparaison à l'algorithme séquentiel de préfixe supposé exécuté à la vitesse moyenne  $\Pi_{ave}$ , l'algorithme adaptatif de préfixe a une accélération asymptotique égale à  $\frac{p+1}{2}$  ; il est optimal et ce sans faire aucune hypothèse sur les vitesses des différents processeurs.

Dans le paragraphe suivant, nous vérifions expérimentalement ces résultats théoriques dans les deux cas processeurs identiques et processeurs de vitesses variables.

---

## 6. Expérimentations

Nous avons fait des expérimentations sur une machine à mémoire partagée (SMP) à 8 processeurs (Intel Itanium-2 à 1.5GHz), avec 31 GB de mémoire et en contexte multi-utilisateurs sous le système GNU-Linux 2.6.7. Les algorithmes parallèle et adaptatif ont été implémentés sur Kaapi [6] qui intègre l'ordonnancement par vol de travail.

Les expérimentations consistent au calcul des préfixes de 100000 éléments (double) avec un temps de 0,1ms par opération  $\star$  en faisant varier  $p$  le nombre de processeurs utilisés (de 1 à 8). Le temps séquentiel optimal de référence est de 10s.

Les tableaux 1 et 2 donnent les temps d'exécution obtenus par les deux algorithmes parallèles (à grain fixé sur  $p$  processeurs et à grain adaptatif). Pour chaque expérience, 10 mesures ont été effectuées et seuls sont reportés les temps de l'exécution la plus rapide, la plus lente et le temps moyen des 10 exécutions.

Le tableau 1 compare les temps d'exécution lorsqu'il n'y a pas d'autres calculs en cours sur les processeurs. On remarque que les mesures de temps sont stables (écart entre temps minimum et maximum inférieur à 5% pour l'algorithme à grain fixé et inférieur à 4% pour l'algorithme à grain adaptatif). On vérifie l'optimalité de l'algorithme à grain fixé dont le temps est à moins de 5% de la borne inférieure. Mais surtout, on vérifie l'optimalité de l'algorithme adaptatif (théorème 5.1) qui est aussi à moins de 5% de la borne inférieure.

Dans, le tableau 2, des processus de charge additionnels sont injectés pour perturber l'occupation de la machine et simuler le comportement d'une machine réelle, perturbée

par d'autres utilisateurs. Par souci de reproductibilité, chaque expérience sur  $p \leq 8$  processeurs est perturbée par  $8 - p + 1$  processus artificiels de durée supérieure à 10s. On peut vérifier dans le tableau 2 que l'algorithme adaptatif est au moins 27% plus rapide.

	Sequentiel	Statique				Adaptatif			
		p=2	p=4	p=6	p=7	p=2	p=4	p=6	p=7
Minimum	10,00	6,70	4,00	3,00	2,60	6,70	4,00	2,90	2,60
Maximum	10,00	6,72	4,04	3,00	2,61	6,75	4,01	2,90	2,65
Moyenne	10,00	6,71	4,01	3,00	2,60	6,73	4,01	2,90	2,62
Borne inférieure	10,00	6,66	4,00	2,85	2,5	6,66	4,00	2,85	2,5

**Tableau 1.** Comparaison des temps des trois algorithmes sur  $p$  processeurs identiques.

	Statique				Adaptatif			
	p=2	p=4	p=6	p=8	p=2	p=4	p=6	p=8
Minimum	9,94	5,05	4,24	3,19	8,07	4,49	3,21	2,39
Maximum	13,38	6,93	5,03	3,92	13,18	5,32	3,97	2,77
Moyenne	12,80	6,43	4,89	3,52	11,93	4,79	3,36	2,54

**Tableau 2.** Comparaison des temps des algorithmes sur  $p$  processeurs perturbés. Sur les 10 exécutions de chacun des tests, l'algorithme adaptatif est le plus rapide.

En conclusion, l'algorithme à grain adaptatif apporte une performance garantie lorsque la machine est partagée entre plusieurs utilisateurs, en s'adaptant automatiquement aux ressources disponibles au cours de l'exécution. De plus sa performance reste proche de l'optimale même dans le cas idéal où les processeurs sont tous dédiés à l'application. Il apparaît donc être plus performant que l'algorithme séquentiel ou qu'un algorithme parallèle à grain fixé.

Ceci est confirmé par une autre expérimentation où chaque test élémentaire correspond au lancement simultané en concurrence des neuf programmes : algorithme adaptatif sur huit processeurs, algorithme séquentiel et l'algorithme parallèle à grain fixé pour les sept valeurs  $p = 2, \dots, 8$  processeurs. Le tableau 3 résume les résultats sur une campagne de 10 tests. Pour les 10 exécutions menées, l'algorithme à grain adaptatif est toujours le plus rapide. Son temps moyen d'exécution est en moyenne 19% fois plus court que celui de l'algorithme optimal à grain fixé sur 8 processeurs, avec des écarts pouvant aller jusqu'à 40% sur l'un des tests.

	Sequentiel	Statique					Adaptatif p=8
		p=2	p=4	p=6	p=7	p=8	
Minimum	21,83	18,16	15,89	14,99	13,92	12,51	8,76
Maximum	23,34	20,73	17,66	16,51	15,73	14,43	12,70
Moyenne	22,57	19,50	17,10	15,58	14,84	13,17	11,14
Mediane	22,58	19,64	17,38	15,57	14,63	13,11	11,01

**Tableau 3.** Comparaison des temps des neuf algorithmes lancés simultanément. Sur les 10 exécutions de chacun des tests, l'algorithme adaptatif est le plus rapide.

---

## 7. Conclusion

Motivés par l'utilisation de machines multi-processeurs partagées entre plusieurs utilisateurs, nous avons introduit un nouvel algorithme parallèle pour le calcul des préfixes qui s'adapte automatiquement et dynamiquement aux processeurs effectivement disponibles. Nous avons montré son temps d'exécution était asymptotiquement optimal. Il est équivalent à celui de l'algorithme séquentiel lorsqu'un seul processeur est disponible et à celui d'un algorithme parallèle optimal lorsque  $p$  processeurs identiques sont disponibles. Dans le cas de  $p$  processeurs de vitesses variables, son temps est équivalent à celui d'un algorithme optimal sur  $p$  processeurs identiques de vitesse égale à la moyenne des vitesses. Ces résultats théoriques sont validés par les expérimentations menées sur une machine SMP à 8 processeurs. Une première perspective est de le valider sur la grille hétérogène nationale GRID'5000. Plus généralement, notre algorithme adaptatif est basé sur le couplage récursif et dynamique de deux algorithmes un algorithme séquentiel, optimal en nombre d'opérations, et l'autre parallèle avec un degré maximal de parallélisme. Ce schéma a été proposé dans [2] avec deux algorithmes réalisant le même nombre d'opérations. Pour les préfixes, nous avons étendu ici ce schéma au cas où l'algorithme parallèle requiert plus d'opérations que l'algorithme séquentiel. Nous pensons que ce schéma, analysé ici pour les préfixes, est plus général et s'applique à un grand nombre de problèmes, en particulier pour la résolution de systèmes linéaires dans le cadre du projet IMAG-INRIA AHA<sup>1</sup>.

---

## 8. Bibliographie

- [1] Michael A. Bender and Michael O. Rabin. Online Scheduling of Parallel Programs on Heterogeneous Systems with Applications to Cilk. *Theory Comput. Syst.*, 35(3) :289-304,2002.
- [2] El-Mostafa Daoudi, Thierry Gautier, Aïcha Kerfali, Rémi Revire, and Jean-Louis Roch. Algorithmes parallèles à grain adaptatif et applications. *TSI*, vol. 24 : 1-20, 2005.
- [3] Giorgos Dimitrakopoulos and Dimitris Nikolos. High-Speed Parallel-Prefix VLSI Ling Adders. *IEEE Trans. Computers*, 54(2), 225-231, 2005.
- [4] Faith E. Fich. New bounds for parallel prefix circuits. *In STOC '83 : Proceedings of the 15th ACM symp. Theory of computing* , pages 100-109, New York, NY, USA, 1983. ACM Press.
- [5] Matteo Frigo and Charles E. Leiserson and Keith H. Randall. The Implementation of the Cilk-5 Multithreaded Language. *In Proceedings of the ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'98)* , June 1998.
- [6] Jafar, Samir and Gautier, Thierry and Krings, Axel W. and Roch, Jean-Louis. A Checkpoint/Recovery Model for Heterogeneous Dataflow Computations Using Work-Stealing. *In LNCS Springer-Verlag, editor, EUROPAR'2005*, Lisboa, Portugal, August 2005.
- [7] Richard Ladner and Michael Fischer. Parallel Prefix Computation. *J. ACM*, 27(4) :831-838, 1980.
- [8] Projet MOAIS : KAAPI homepage. <http://gforge.inria.fr/projects/kaapi/>.
- [9] Haigeng Wang and Alexandru Nicolau and Kai-Yeng S. Siu. The Strict Time Lower Bound and Optimal Schedules for Parallel Prefix with Resource Constraints. *IEEE Trans. Comput.*, 45(11), 1257-1271, 1996.

---

1. L'objectif de ce projet est d'améliorer la portabilité et les performances des applications grâce à l'utilisation d'algorithmes hybrides adaptatifs