

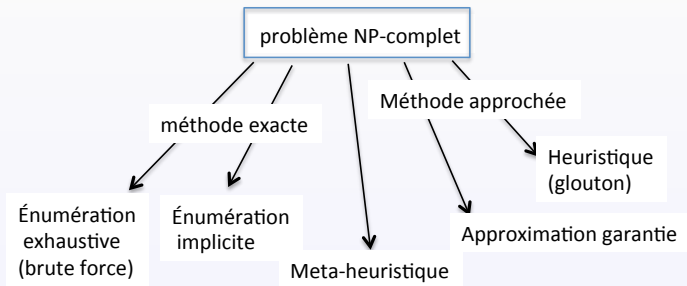
# Algorithmique avancée Branch and Bound

Denis TRYSTRAM  
Notes de cours ENSIMAG Alternants 2A

Sept. 2023

# Différentes manières de résoudre un problème

## Rappels



## Présentation du problème

On cherche à résoudre des problèmes *difficiles* par méthodes exactes.

- On ne peut pas espérer concevoir une solution en temps polynomial pour obtenir une solution exacte à ce type de problèmes.
- Par contre, nous allons montrer comment construire des solutions efficaces qui font beaucoup mieux que l'énumération exhaustive de toutes les solutions possibles.  
Bien sûr, ces stratégies d'énumération implicite restent exponentielles.

C'est le cas de la méthode de séparation/évaluation (plus connues par son nom en anglais : *Branch-and-Bound*).

## B-and-B

On considère le problème général suivant<sup>1</sup> :

- minimiser  $f(x)$  pour  $x \in \Omega$  subset of  $\mathbb{R}^n$
- sous un ensemble de contraintes

Une exploration exhaustive systématique de toutes les solutions est impossible pour des tailles "raisonnables" de problèmes.

---

<sup>1</sup>Cette formulation englobe de très nombreux problèmes

## Principe

Il est possible de limiter l'explosion combinatoire en introduisant un système de bornes dans le parcours de toutes configurations possibles du problème.

### Définition

Un algorithme Branch-and-Bound consiste à **énumérer systématiquement toutes les solutions candidates, où de larges ensembles de configurations inutiles sont éliminées en utilisant des bornes inférieures et supérieures** (estimations de la fonction objectif que l'on cherche à optimiser).

## Concrètement

Une stratégie Branch-and-Bound divise le problème en sous-problèmes.

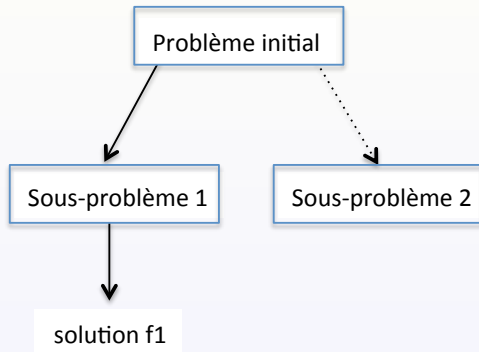
- Supposons que l'on dispose d'une méthode qui fournit une borne inférieure du coût de n'importe quelle solution dans un sous-ensemble donné.
- Si la meilleure solution trouvée jusqu'à présent a un coût plus petit que cette borne, il est inutile d'explorer les solutions de ce sous-ensemble.

## BandB pour un problème de min

BandB repose sur deux procédures qui calculent (efficacement) une borne supérieure et inférieure de la valeur optimale de l'objectif dans chaque région.

- Une borne supérieure peut être déterminée par l'évaluation de n'importe quelle configuration dans la région considérée (par une heuristique glouton ou par optimisation locale).
- Une borne inférieure de la solution dans la région considérée est en général fournie par relaxation (ou par dualité).

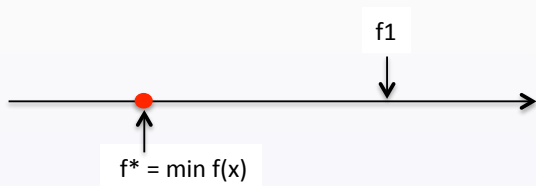
## Etape 1.



**Figure:** On explore une cascade de sous-problèmes jusqu'à l'obtention d'une solution réalisable (ici,  $f1$ ).

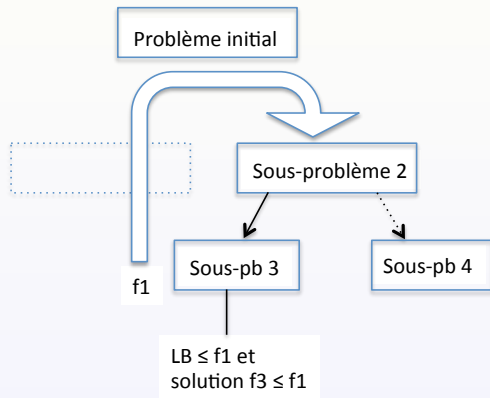


## Etape 1. Visualisation des valeurs de l'objectif.



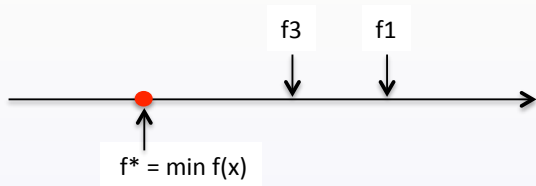
**Figure:** La première solution fournit une borne supérieure de l'optimal  $f^*$ .

## Etape 2.



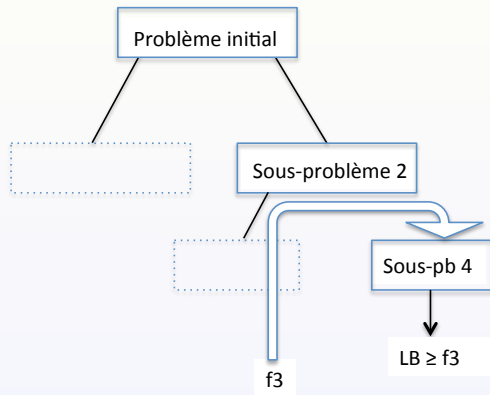
**Figure:** Exploration du sous-problème 3 : on continue à explorer l'arbre des configurations en cascade de sous-problèmes jusqu'à l'obtention d'une solution réalisable.

## Visualisation de l'objectif.



**Figure:** La solution  $f3$  obtenue à l'étape 2 améliore la borne supérieure  $f1$ .

## Etape 3.



**Figure:** L'évaluation de la borne inférieure du sous-problème 4 montre que toutes les solutions seront moins bonnes que la solution déjà trouvée. On arrête l'exploration dans cette branche.



**Figure:** On arrête l'exploration dans cette branche car la borne inférieure du sous-problème est plus grande que la solution courante  $f_3$ .

## En résumé

Pour mettre en œuvre un BandB avec minimum, on a besoin de :

- Une stratégie de découpe en sous-problèmes (séparation).
- Une heuristique pour initialiser la borne supérieure.
- Une procédure (rapide) de calcul d'une borne inférieure (en général, non réalisable).