Programmation dynamique
Notes de cours

Denis Trystram

ENSIMAG alternants 2A

Oct. 2023

Objectif et Roadmap

Présenter la méthode de **Programmation Dynamique** sous ses différents aspects : Conception, analyse (et implémentation en TP).

Outline

Un peu d'histoire...

Bagdad, IX siècle

On rapporte l'histoire d'un chamelier qui négocia le prix d'une caravane avec un émissaire du calife El Maamun, fils du célèbre Harun al Rashid [a].

a. Giegerich et al. Science of Computer Programming, 2004

- La transaction consiste en un échange de chameaux contre des barils d'huile.
- L'affaire fut conclue, la formule inscrite sur le sable : $(1 + 2) \times 3 \times 4 + 5 = 41$ barils d'huile.

Un peu d'histoire...

- Le temps d'une prière, le vent efface les parenthèses :
  $1 + 2 \times 3 \times 4 + 5$.
- Arrivé au palais, il a fallu recalculer la valeur.
- Le chamelier proposa (évidemment)
  $(1 + 2) \times 3 \times (4 + 5) = 81$ barils.

Résolution "à la main"

Al Khwarizmi fut appelé au palais pour tirer au clair cette affaire.
Il trouva tout d'abord qu'il y avait 14 façons différentes de parenthéser l'expression.

- $(1+2)\times 3\times(4+5)=81$
- $1+2\times(3\times 4+5)=35$
- $(1+2\times 3)\times 4+5=33$
- ...

Une question intéressante laissée en exercice :
Ecrire un algorithme brute force pour ce calcul.

- Bien sûr, il est possible de calculer toutes les valeurs et d'en prendre le minimum (valeur qui avantageait le Calife)
  mais Al Khwarizmi proposa une méthode générale [a].
- Pour cela, il reçu une bourse d'étude
- et on coupa la tête du chamelier

a. Il n'est pas le "père de l'algorithmique" sans raison !

Formalisation du problème

On note τ l'expression complète (la chaine de caractères) :
$\tau = 1 + 2 \times 3 \times 4 + 5$
et on indice les caractères selon leur rang dans la chaine.

$$=_0 1_1 +_2 2_3 \times_4 3_5 \times_6 4_7 +_8 5_9$$

- $t(i, j)$ désigne la sous-expression entre i et j.
- Par exemple, $t(2, 5) = 2 \times 3$.

La *meilleure* valeur (minimale pour le Calife) de la sous-expression est stockée dans un tableau (T) contenant toutes les valeurs possibles.
L'objectif est de déterminer $T(0, 9)$.

Résolution

On définit

- $T(i, i+1) = n$ si $t(i, i+1) = n$
- $T(i, j) = min_{k|i<k<j}[T(i, k) op(k, k+1) T(k+1, j)]$

op est une opération : $+$ ou $\times$

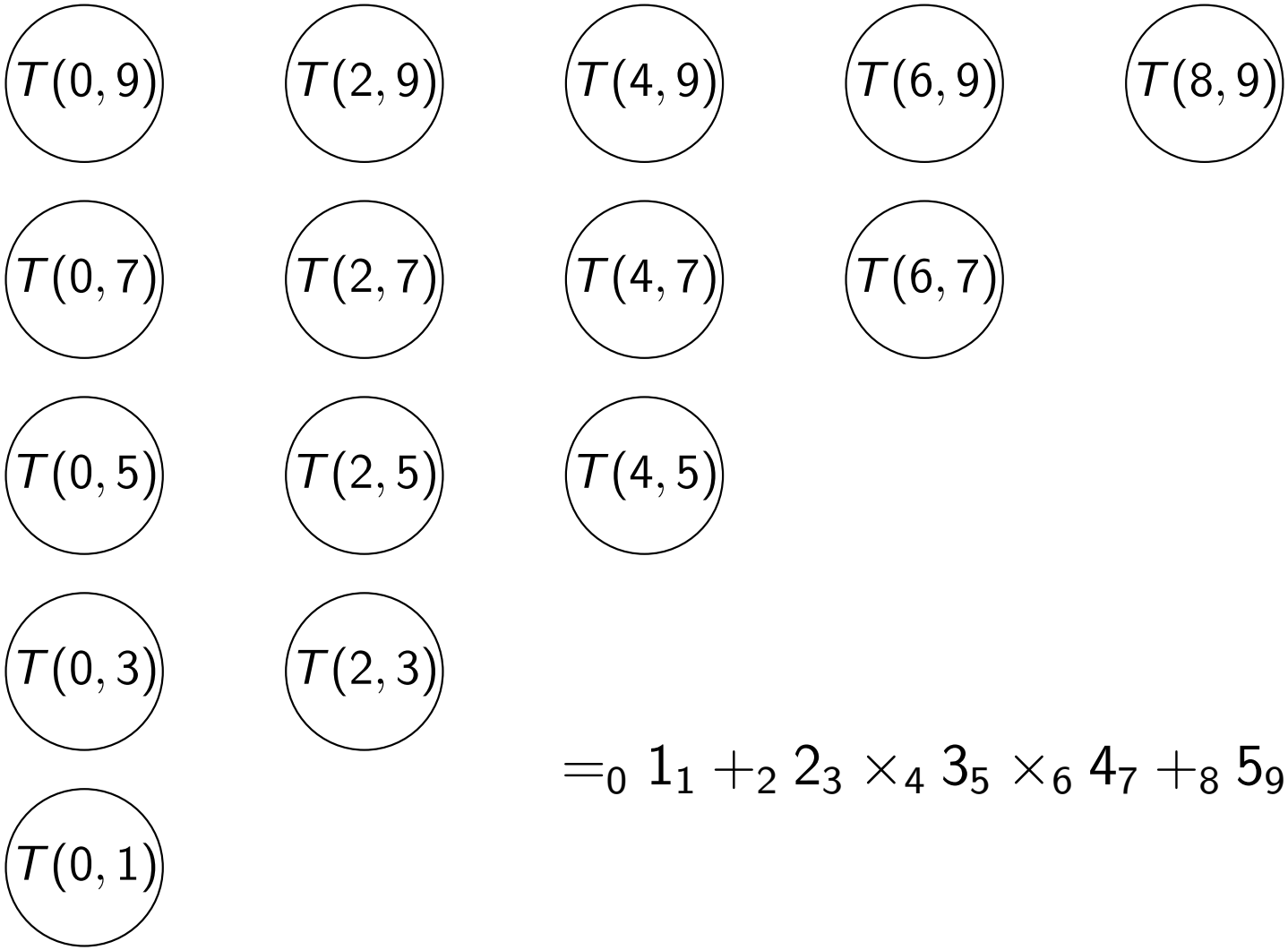
Ainsi, partant des petites valeurs de $(i, i+1)$, on peut calculer successivement toutes les entrées de la table T.

$T(0, 9) =$
$min[T(0,1)+T(2,9), T(0,3)\times T(4,9), T(0,5)\times T(6,9), T(0,7)+T(8,9)]$.

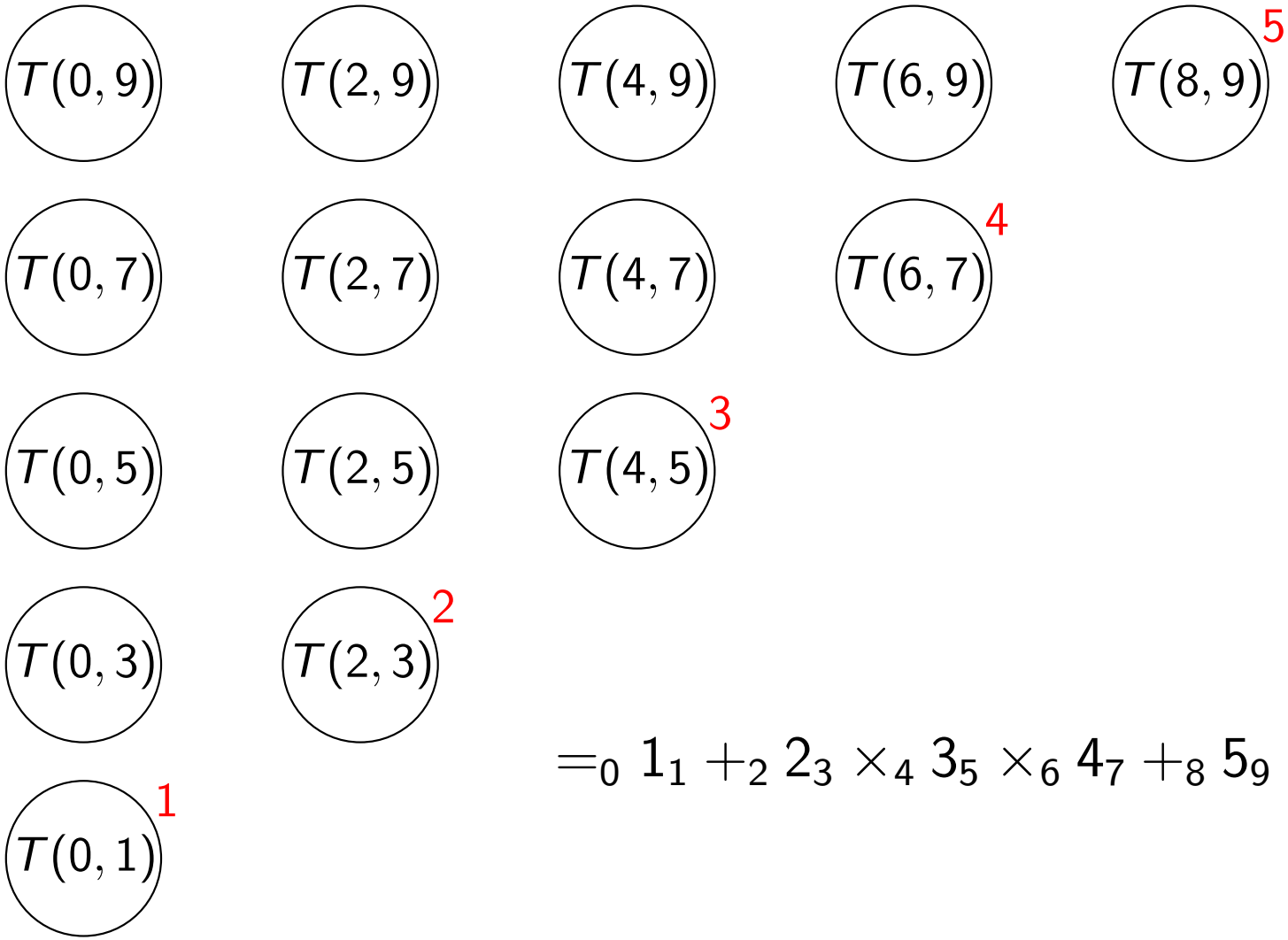
Comment faire ?

- On part de ce que l'on connait...
- Les $T(i, i+1) = n$ si $t(i, i+1) = n$
  $T(0,1), T(2,3), T(4,5), T(6,7), T(8,9)$
- On en déduit de proche en proche toutes les autres valeurs de T

Déroulement

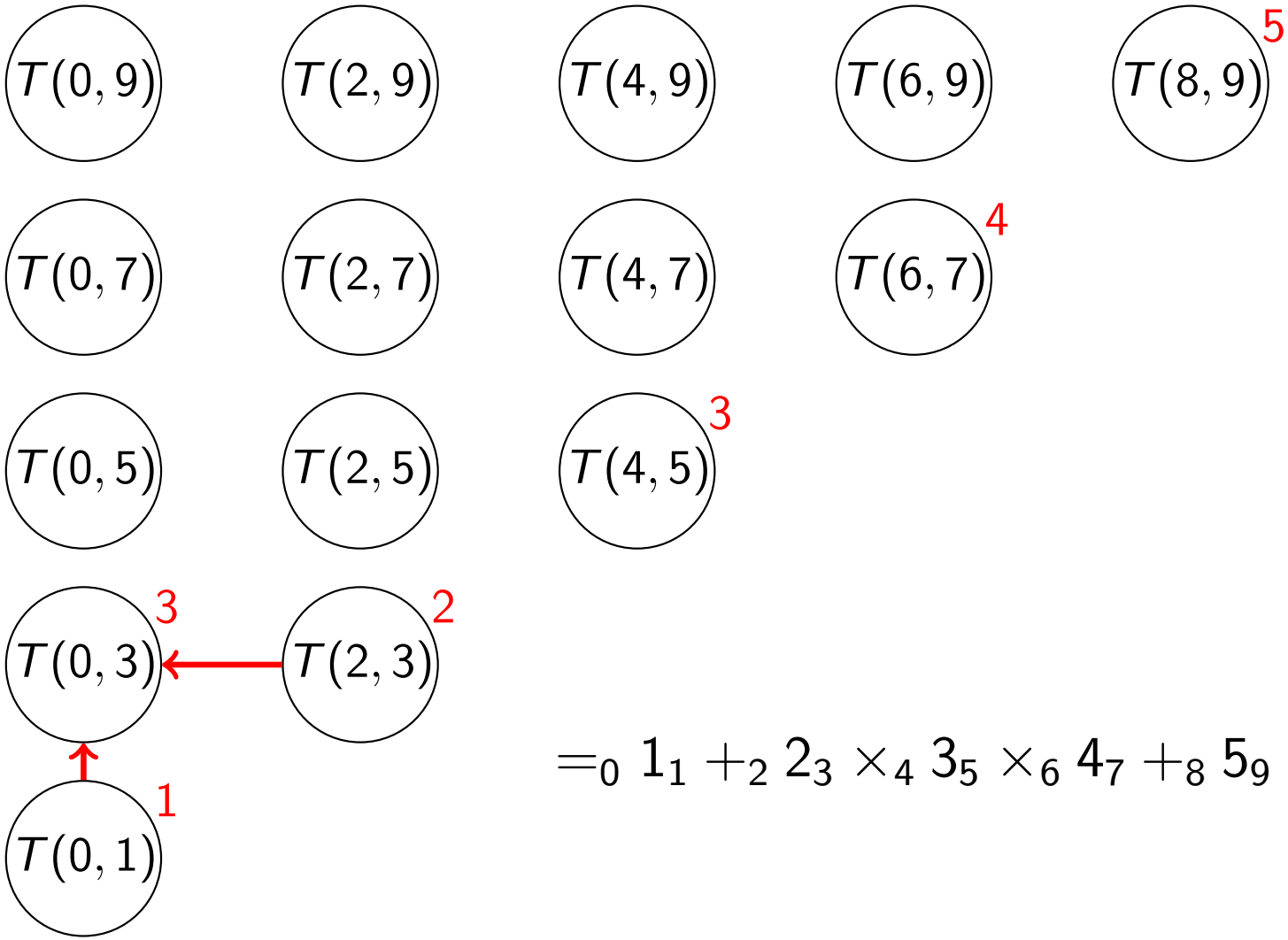


Déroulement



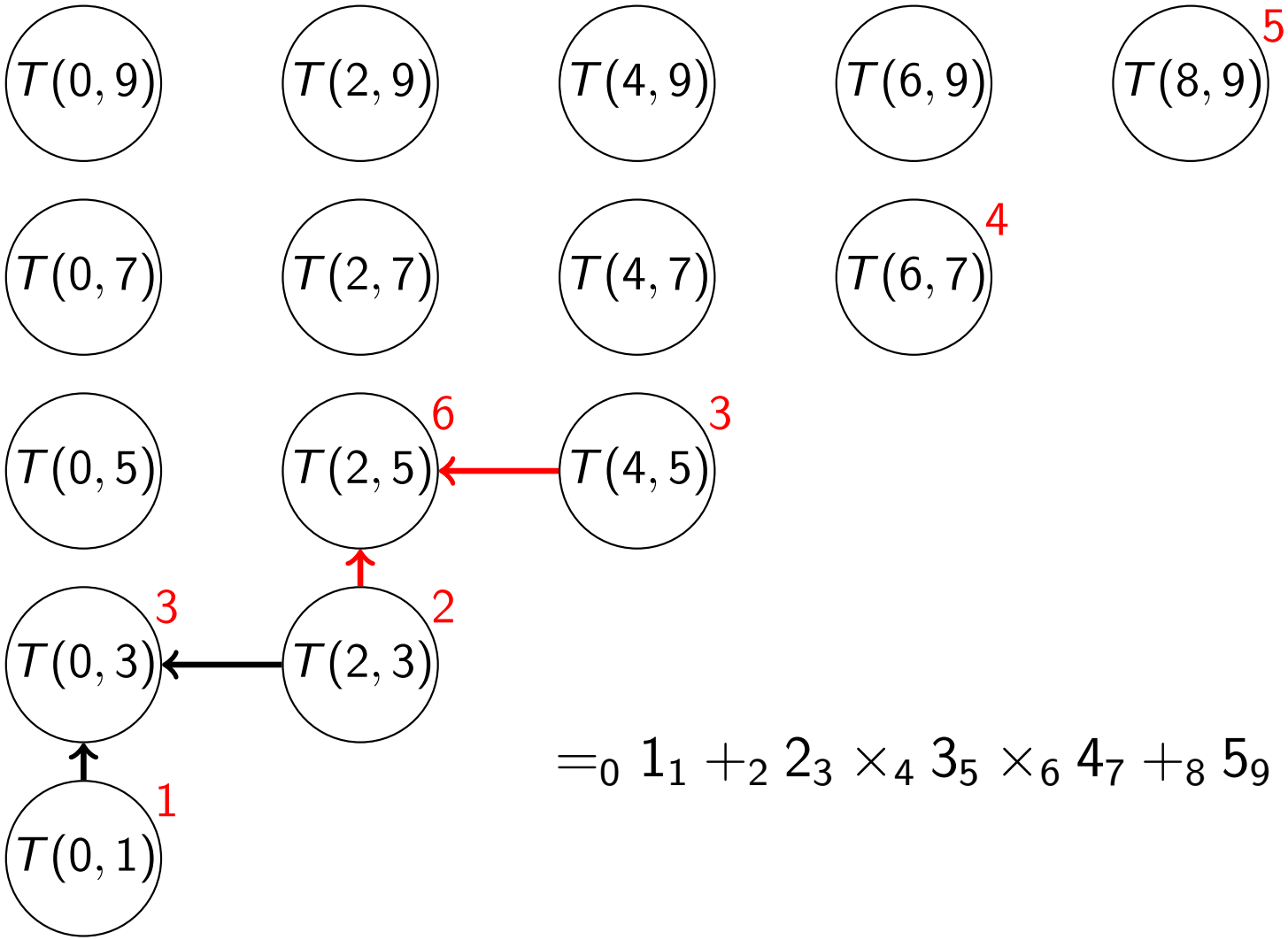
$$=_0 1_1 +_2 2_3 \times_4 3_5 \times_6 4_7 +_8 5_9$$

Déroulement



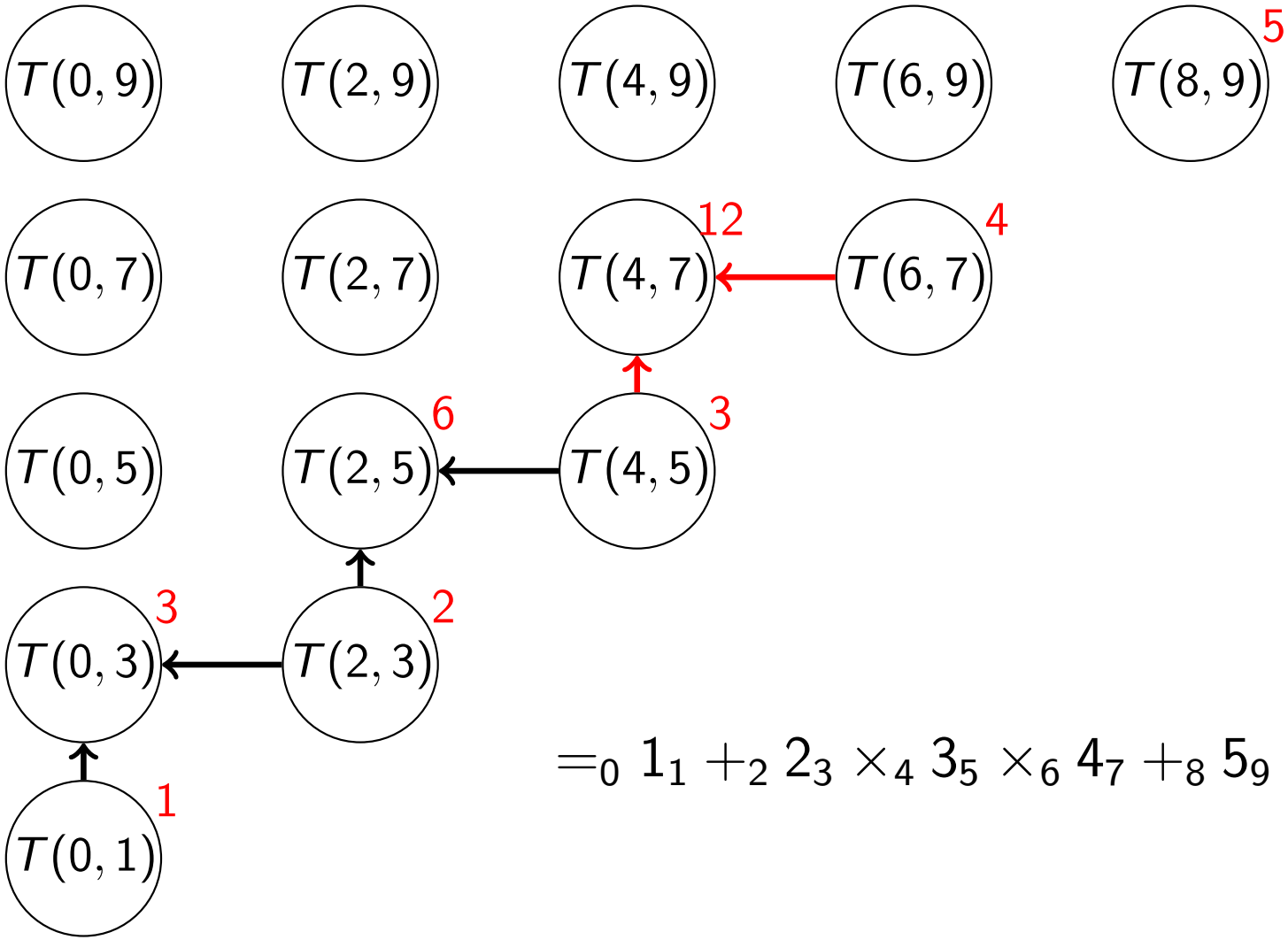
$$=_0 1_1 +_2 2_3 \times_4 3_5 \times_6 4_7 +_8 5_9$$

Déroulement

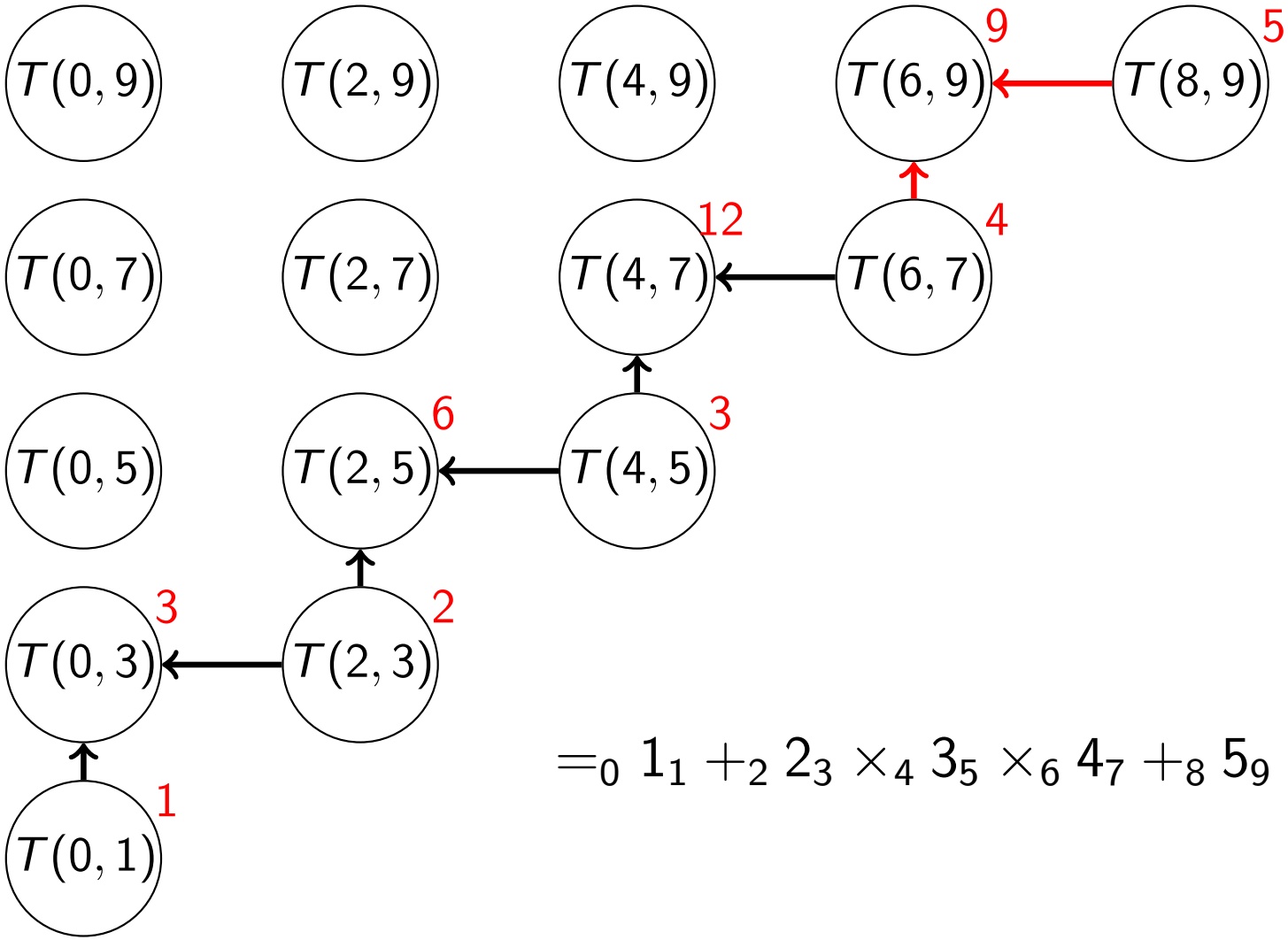


$$=_0 1_1 +_2 2_3 \times_4 3_5 \times_6 4_7 +_8 5_9$$

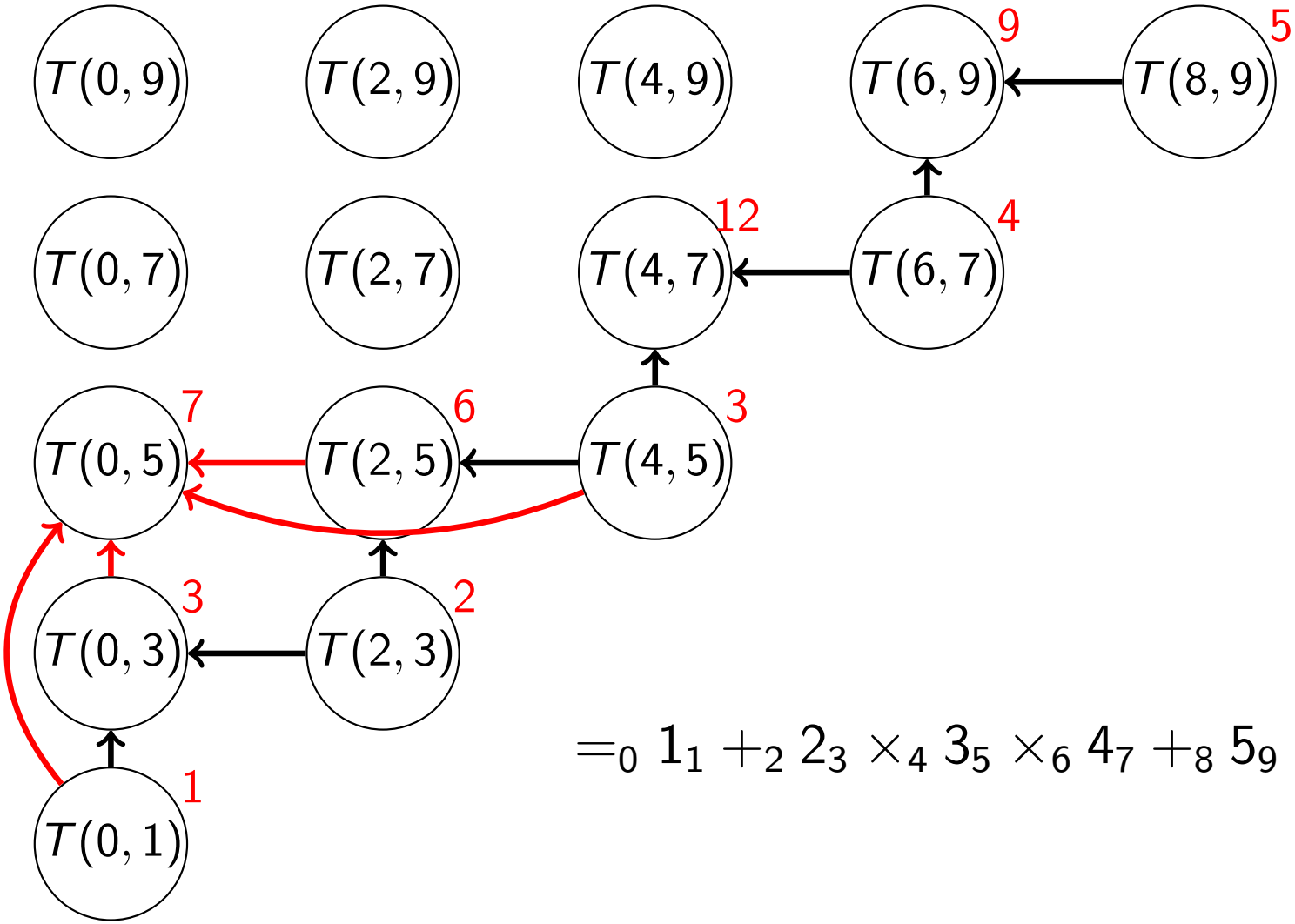
Déroulement



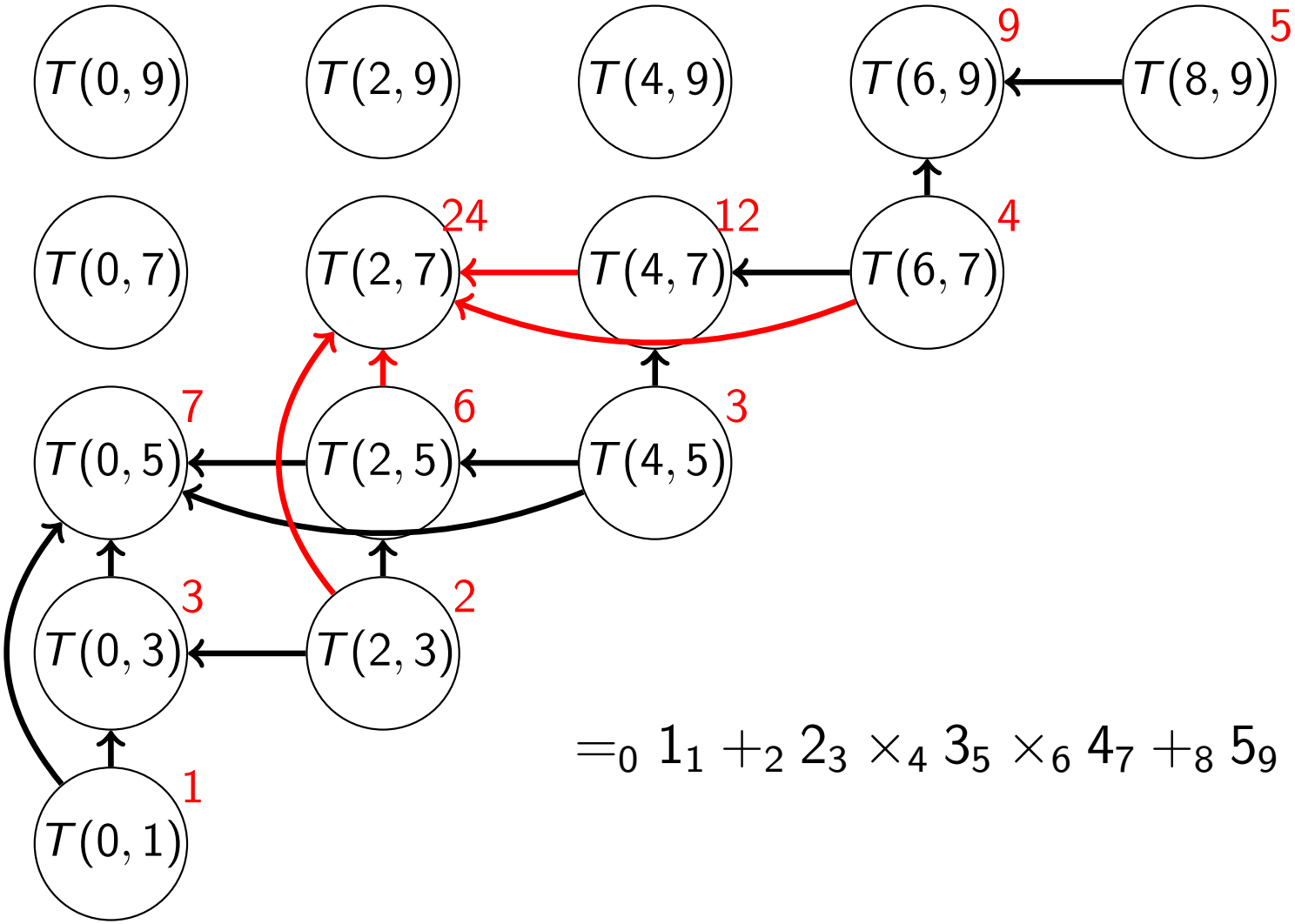
Déroulement



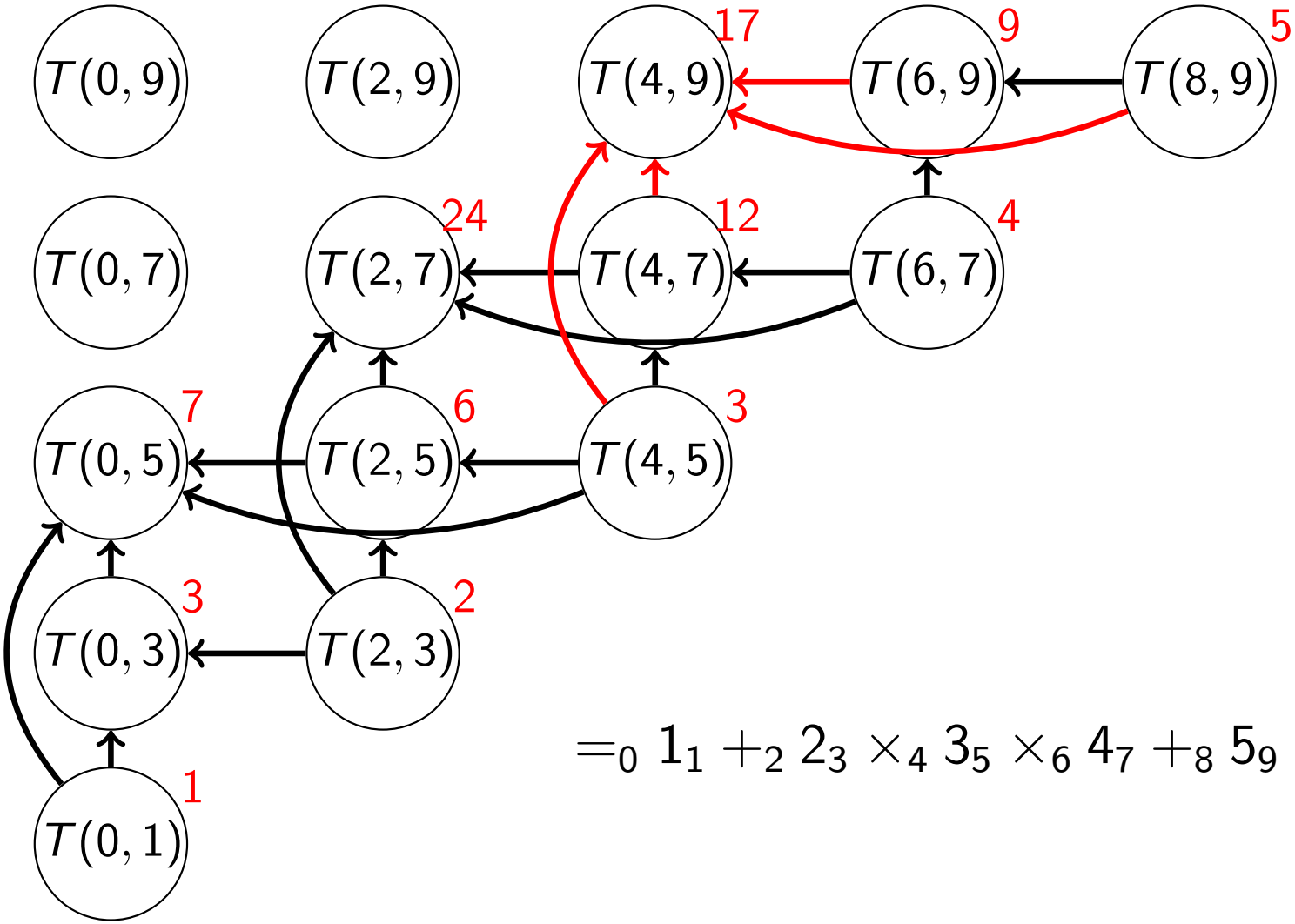
Déroulement



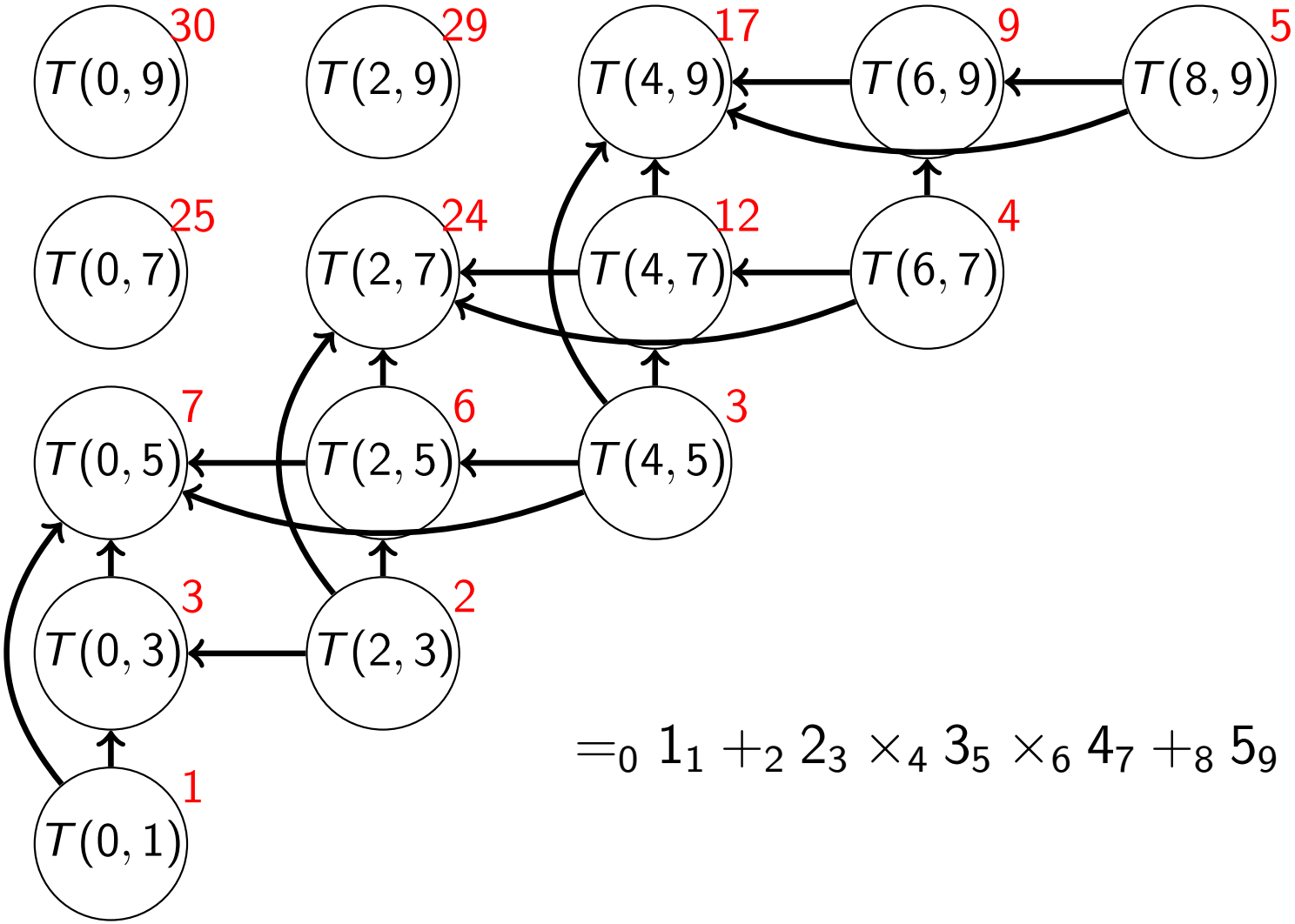
Déroulement



Déroulement



Déroulement



Encore plus fort !

- On peut rajouter une variable pour tracer le chemin (et reconstruire comment la solution a été obtenue).
- On peut calculer de la même façon la valeur maximale [1].
  Il suffit de changer le min en max dans les expressions.
  On trouve $T'(0,9) = 81$.
  On notera ici que le chemin pour obtenir la solution n'est pas le même que dans le cas du minimum.

1. celle qu'a fournie le chamelier et qui lui a coûté la tête !

Outline

Définition

La **programmation dynamique** est une méthode de décomposition d'un problème d'optimisation en sous-problèmes telle que la solution soit obtenue "facilement" dès que l'on connait celles de tous les sous-problèmes.

La difficulté ici est de déterminer les bons sous-problèmes.

2. livre de Bellman "Dynamic Programming", Princeton en 1953

Définition

La **programmation dynamique** est une méthode de décomposition d'un problème d'optimisation en sous-problèmes telle que la solution soit obtenue "facilement" dès que l'on connait celles de tous les sous-problèmes.

La difficulté ici est de déterminer les bons sous-problèmes.

Principe de (sous-optimalité) de Bellman [2] :

- La solution d'un problème d'optimisation peut être obtenue par combinaisons de solutions optimales sur les sous-problèmes.

2. livre de Bellman "Dynamic Programming", Princeton en 1953

Origine(s) du nom

Tiré de l'autobiographie de Bellman "Eye of the hurricane" en 1984 (réédité).

- Bellman travaillait à l'époque dans une entreprise aux US (RAND), il raconte qu'il a choisi "programming" pour ne pas effrayer son chef et parce que cela lui rappelait "Programmation Linéaire".
- Le terme "dynamic" vient de l'aspect de l'évolution de la méthode dans la remontée des différents étages de la récurrence.

Cela ne vous rappelle rien ?

Attention

c'est différent du classique *divide-and-conquer* où il faut TOUT générer.
Exemples : TriFusion, enveloppe convexe, Karatsuba, ...

De plus, cette technique impose que les sous-problèmes soient disjoints (partition).

Retour à Bagdad...

L'interprétation du principe de sous-optimalité de Bellman :

- comme les opérations $+$ et $\times$ sont monotones sur les entiers positifs, les expressions $x + y$ et $x \times y$ sont minimales (resp. maximales) lorsque x et y sont évaluées à leurs valeurs minimales (resp. maximales).

Outline

Définition du problème

On considère n objets ayant chacun un poids w_i et une valeur v_i $(1 \leq i \leq n)$ et un sac-à-dos S de capacité W.

On veut maximiser la valeur totale $(\Sigma_{i \in S} v_i)$ sous la contrainte $\Sigma_{i \in S} w_i \leq W$.

Exemple (1)

On considère l'instance suivante de 6 objets pour un sac de capacité 11 :

index	1	2	3	4	5	6
	(2,5)	(3,7)	(5,16)	(4,13)	(7,19)	(3,10)

Exemple (2)

Résolution par un algorithme **glouton** :

- On trie les objets par leurs rapports *qualité-prix* : $6, 4, 3, 5, 1, 2$
- on affecte les objets dans cet ordre tant qu'il y a de la place dans le sac.

Solution : 3 objets (6, 4 et 1) pour une valeur totale de 28.

Schéma de résolution

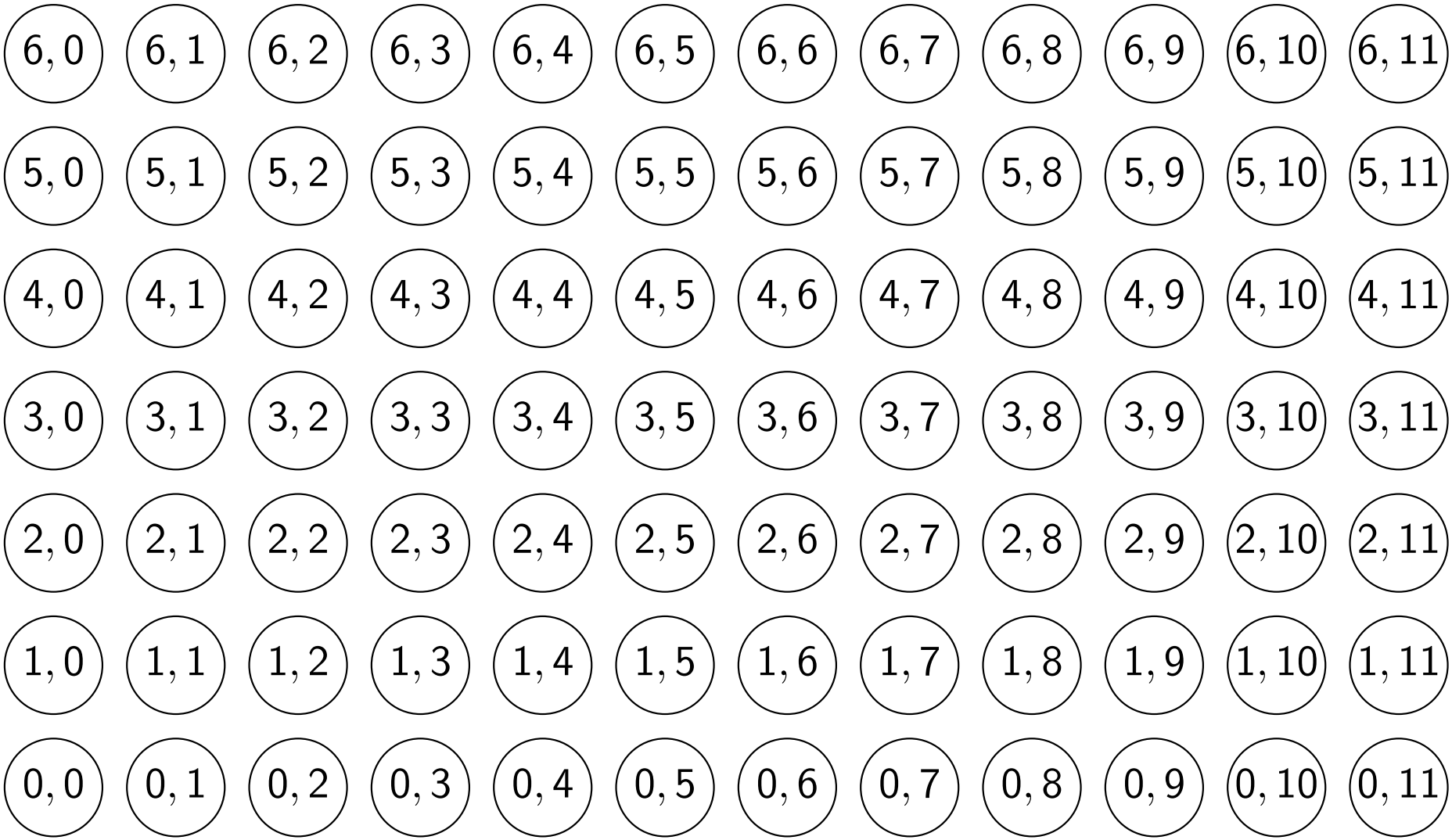
Double récurrence.

On note $V(k, p)$ la meilleure valeur totale des k premiers objets dans un sac de capacité p.
On initialise à 0.

- $V(1, p) =$
  - 0 si $p < w_1$
  - v_1 si $p \geq w_1$
- Pour les autres objets $k > 1$,
  $V(k, p) =$
  - $V(k-1, p)$ si $p < w_k$
  - $\max[V(k-1, p), V(k-1, p-w_k) + v_k]$ si $p \geq w_k$

La solution est $V(n, W)$

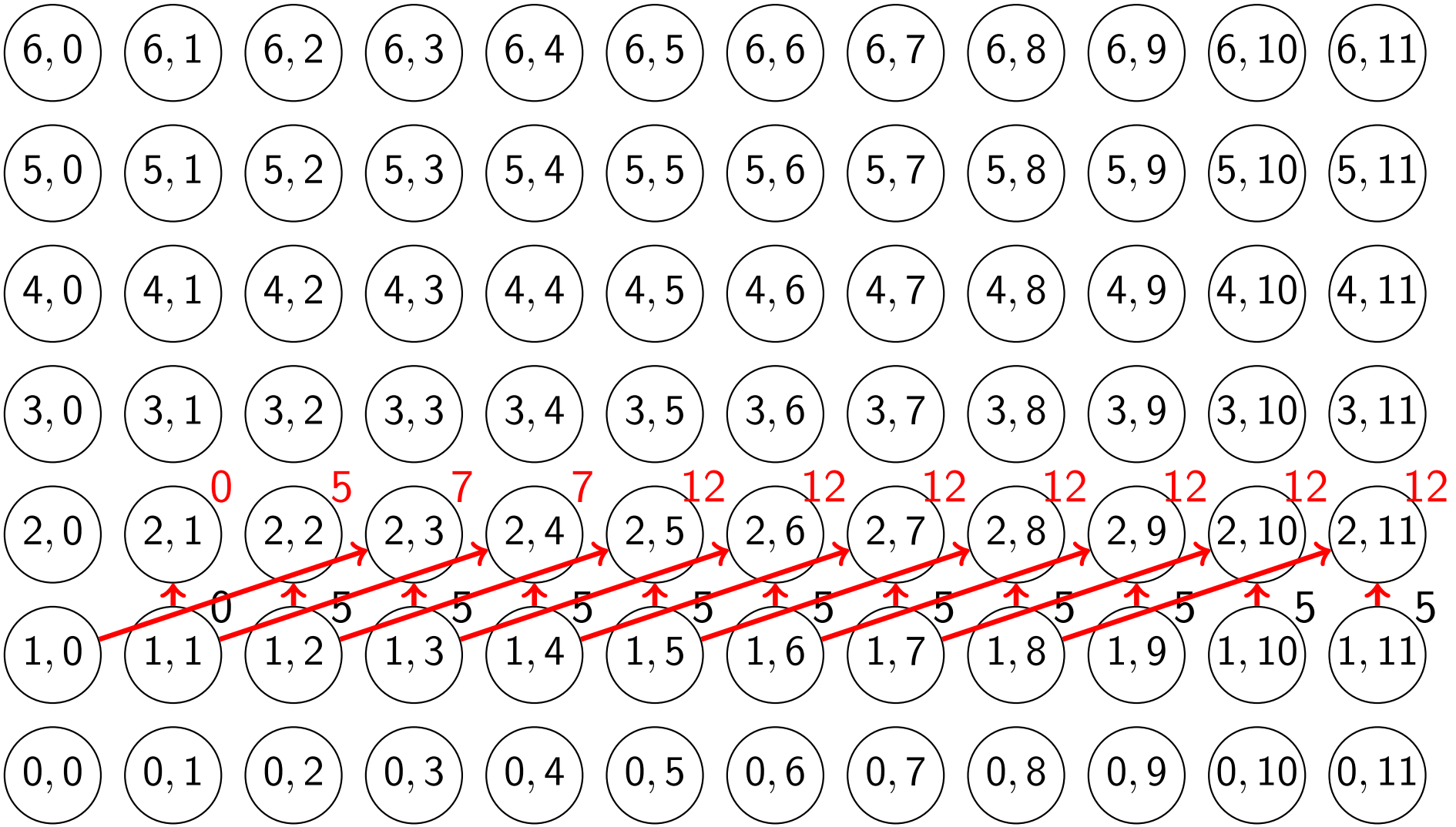
Résolution


6, 0 6, 1 6, 2 6, 3 6, 4 6, 5 6, 6 6, 7 6, 8 6, 9 6, 10 6, 11
5, 0 5, 1 5, 2 5, 3 5, 4 5, 5 5, 6 5, 7 5, 8 5, 9 5, 10 5, 11
4, 0 4, 1 4, 2 4, 3 4, 4 4, 5 4, 6 4, 7 4, 8 4, 9 4, 10 4, 11
3, 0 3, 1 3, 2 3, 3 3, 4 3, 5 3, 6 3, 7 3, 8 3, 9 3, 10 3, 11
2, 0 2, 1 2, 2 2, 3 2, 4 2, 5 2, 6 2, 7 2, 8 2, 9 2, 10 2, 11
1, 0 1, 1 1, 2 1, 3 1, 4 1, 5 1, 6 1, 7 1, 8 1, 9 1, 10 1, 11
0, 0 0, 1 0, 2 0, 3 0, 4 0, 5 0, 6 0, 7 0, 8 0, 9 0, 10 0, 11

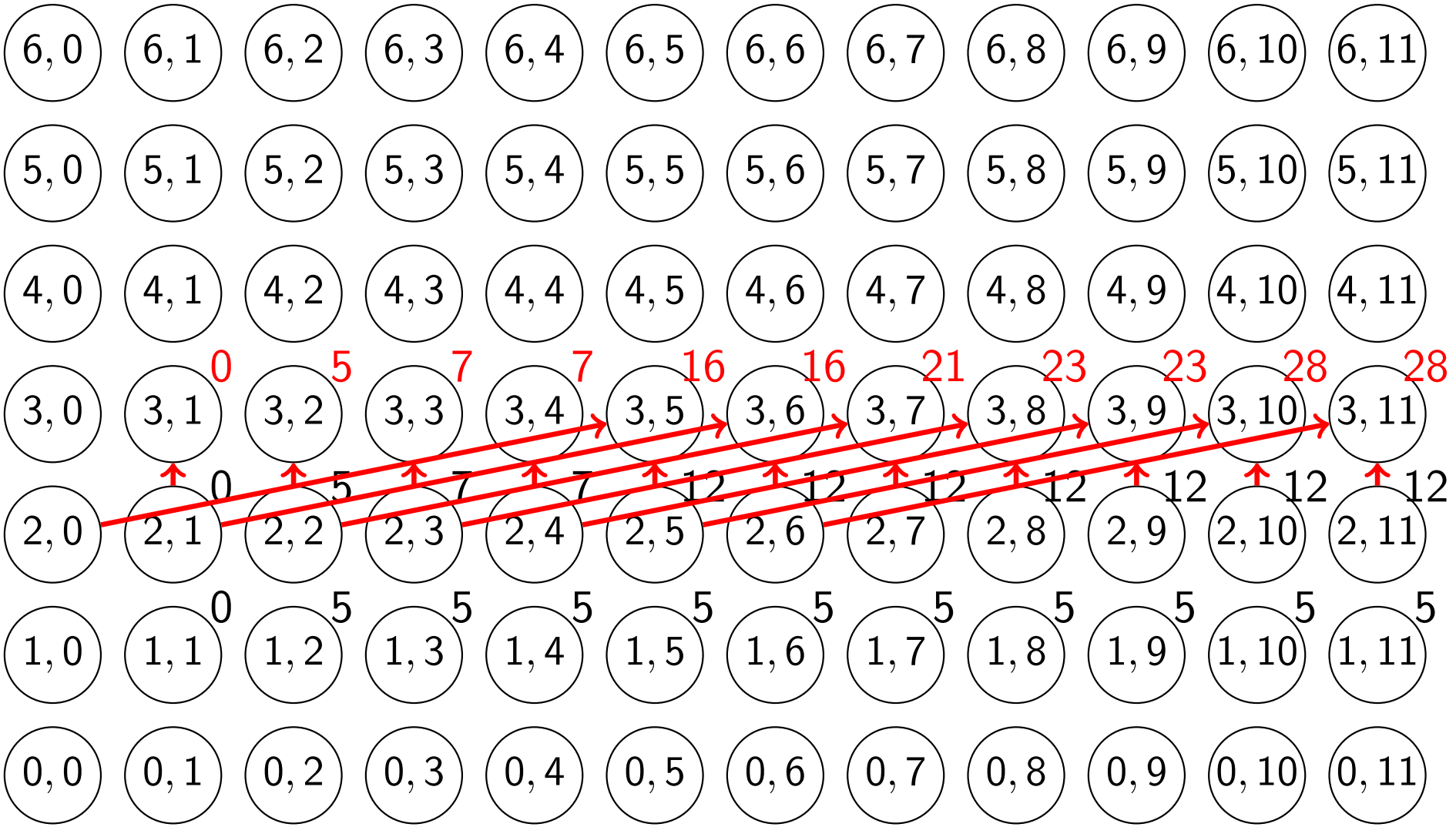
Résolution


6, 0 6, 1 6, 2 6, 3 6, 4 6, 5 6, 6 6, 7 6, 8 6, 9 6, 10 6, 11
5, 0 5, 1 5, 2 5, 3 5, 4 5, 5 5, 6 5, 7 5, 8 5, 9 5, 10 5, 11
4, 0 4, 1 4, 2 4, 3 4, 4 4, 5 4, 6 4, 7 4, 8 4, 9 4, 10 4, 11
3, 0 3, 1 3, 2 3, 3 3, 4 3, 5 3, 6 3, 7 3, 8 3, 9 3, 10 3, 11
2, 0 2, 1 2, 2 2, 3 2, 4 2, 5 2, 6 2, 7 2, 8 2, 9 2, 10 2, 11
1, 0 1, 1 1, 2 1, 3 1, 4 1, 5 1, 6 1, 7 1, 8 1, 9 1, 10 1, 11
0 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
0, 0 0, 1 0, 2 0, 3 0, 4 0, 5 0, 6 0, 7 0, 8 0, 9 0, 10 0, 11

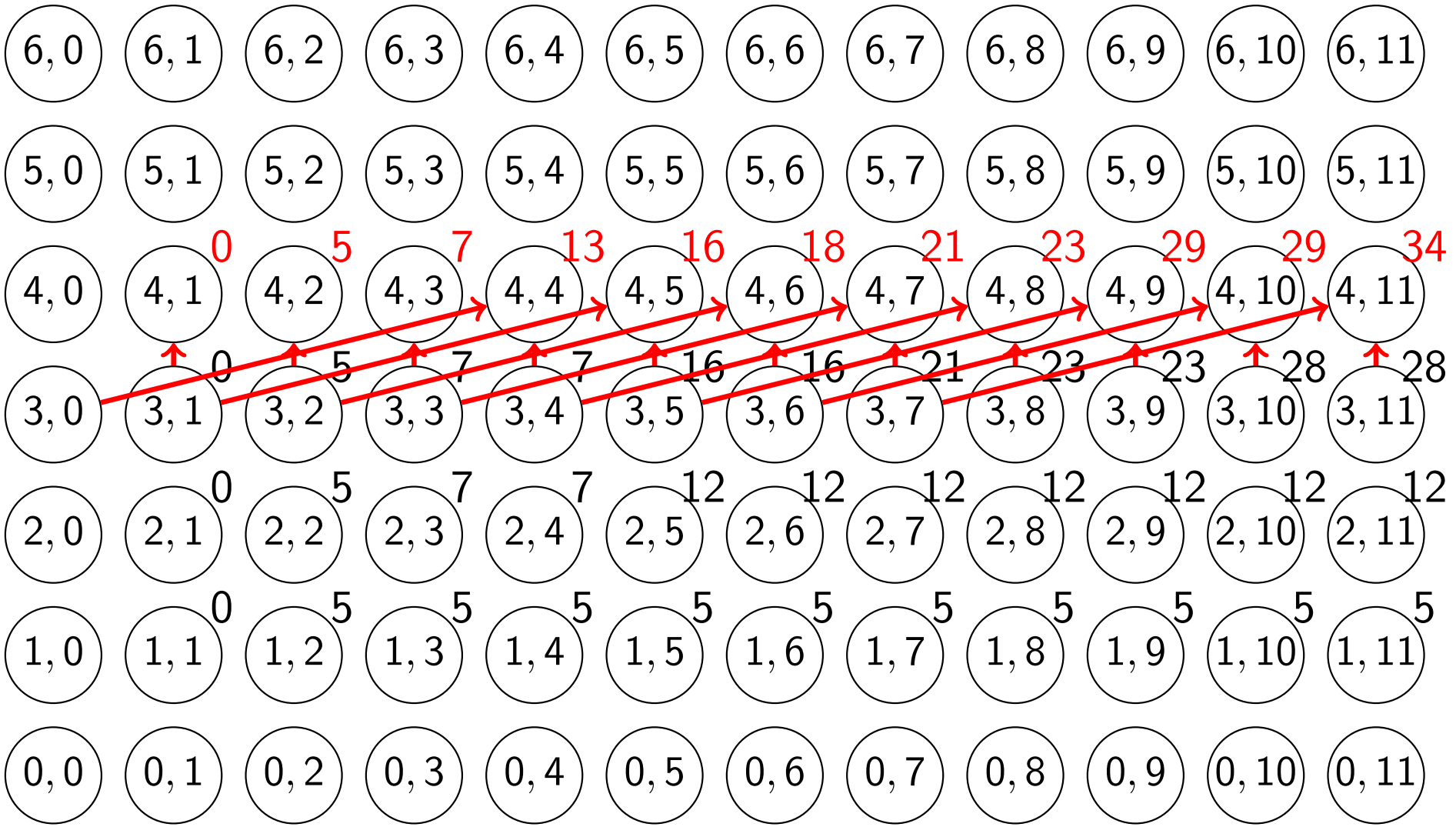
Résolution


6, 0 6, 1 6, 2 6, 3 6, 4 6, 5 6, 6 6, 7 6, 8 6, 9 6, 10 6, 11
5, 0 5, 1 5, 2 5, 3 5, 4 5, 5 5, 6 5, 7 5, 8 5, 9 5, 10 5, 11
4, 0 4, 1 4, 2 4, 3 4, 4 4, 5 4, 6 4, 7 4, 8 4, 9 4, 10 4, 11
3, 0 3, 1 3, 2 3, 3 3, 4 3, 5 3, 6 3, 7 3, 8 3, 9 3, 10 3, 11
2, 0 2, 1 2, 2 2, 3 2, 4 2, 5 2, 6 2, 7 2, 8 2, 9 2, 10 2, 11
1, 0 1, 1 1, 2 1, 3 1, 4 1, 5 1, 6 1, 7 1, 8 1, 9 1, 10 1, 11
0, 0 0, 1 0, 2 0, 3 0, 4 0, 5 0, 6 0, 7 0, 8 0, 9 0, 10 0, 11
0 5 7 7 12 12 12 12 12 12 12
0 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5

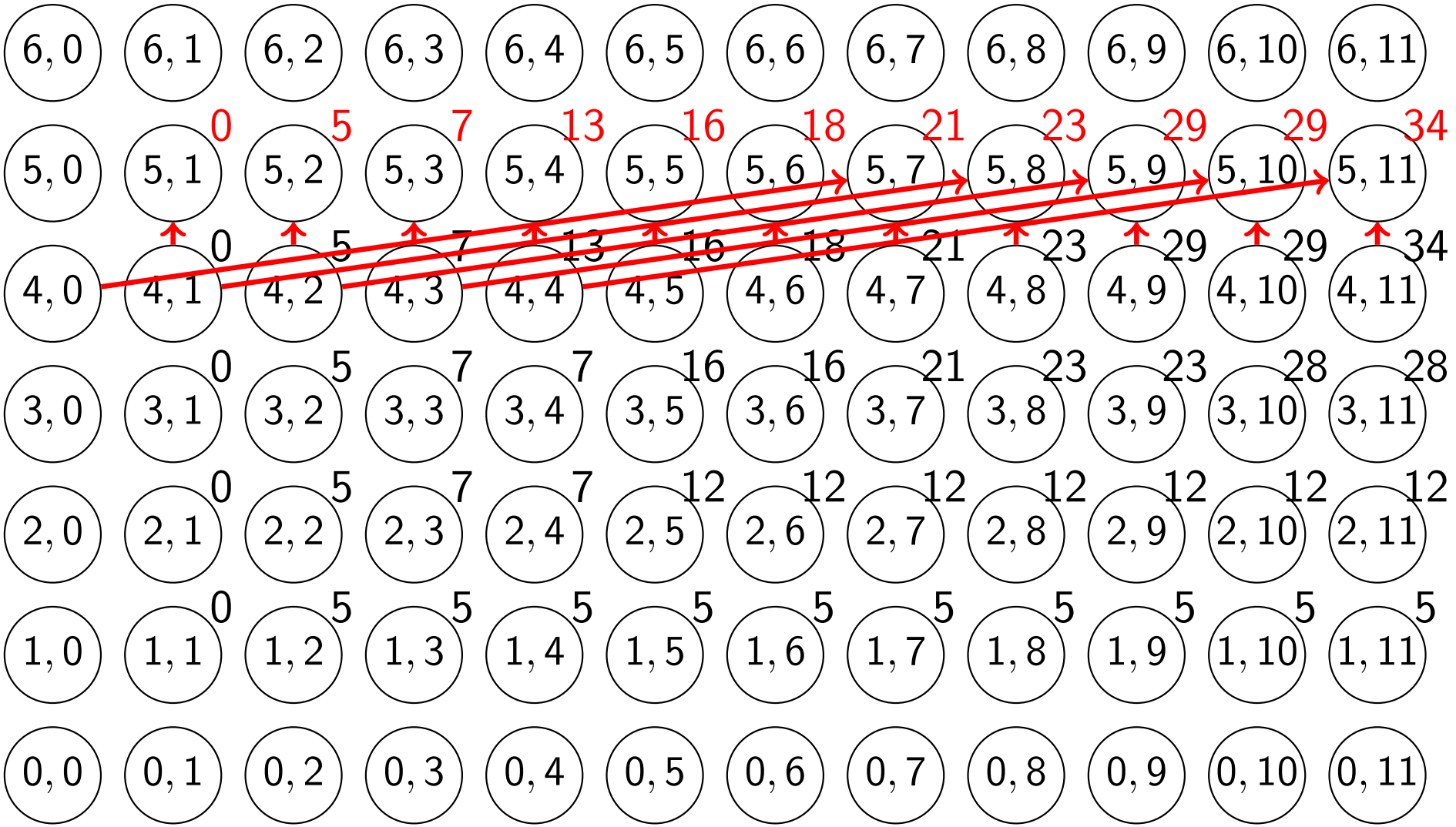
Résolution


6, 0 6, 1 6, 2 6, 3 6, 4 6, 5 6, 6 6, 7 6, 8 6, 9 6, 10 6, 11
5, 0 5, 1 5, 2 5, 3 5, 4 5, 5 5, 6 5, 7 5, 8 5, 9 5, 10 5, 11
4, 0 4, 1 4, 2 4, 3 4, 4 4, 5 4, 6 4, 7 4, 8 4, 9 4, 10 4, 11
3, 0 3, 1 3, 2 3, 3 3, 4 3, 5 3, 6 3, 7 3, 8 3, 9 3, 10 3, 11
2, 0 2, 1 2, 2 2, 3 2, 4 2, 5 2, 6 2, 7 2, 8 2, 9 2, 10 2, 11
1, 0 1, 1 1, 2 1, 3 1, 4 1, 5 1, 6 1, 7 1, 8 1, 9 1, 10 1, 11
0, 0 0, 1 0, 2 0, 3 0, 4 0, 5 0, 6 0, 7 0, 8 0, 9 0, 10 0, 11
0 5 7 7 16 16 21 23 23 28 28
0 5 7 7 12 12 12 12 12 12 12
0 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5

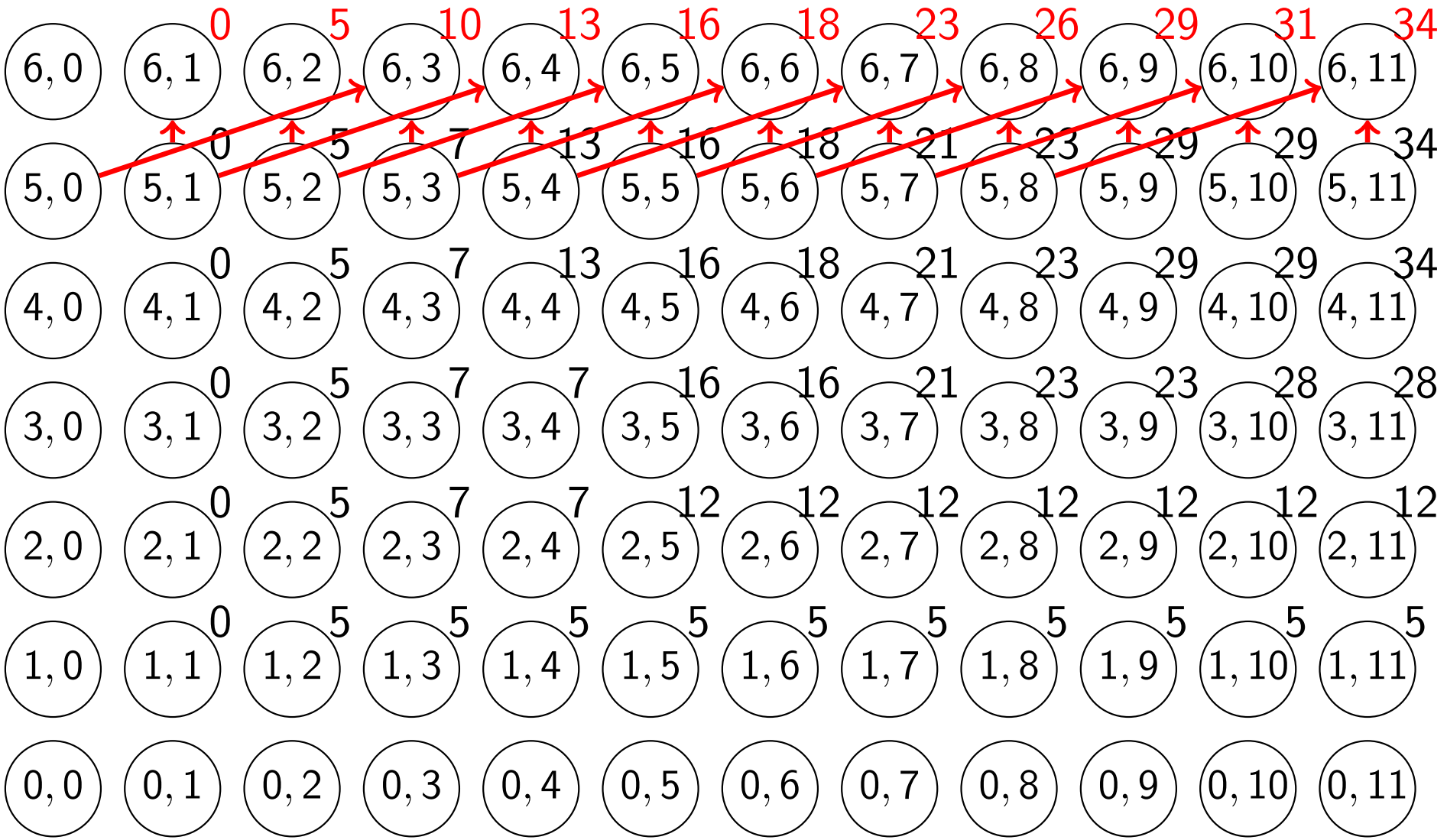
Résolution


6, 0 6, 1 6, 2 6, 3 6, 4 6, 5 6, 6 6, 7 6, 8 6, 9 6, 10 6, 11
5, 0 5, 1 5, 2 5, 3 5, 4 5, 5 5, 6 5, 7 5, 8 5, 9 5, 10 5, 11
4, 0 4, 1 4, 2 4, 3 4, 4 4, 5 4, 6 4, 7 4, 8 4, 9 4, 10 4, 11
0 5 7 13 16 18 21 23 29 29 34
3, 0 3, 1 3, 2 3, 3 3, 4 3, 5 3, 6 3, 7 3, 8 3, 9 3, 10 3, 11
0 5 7 7 16 16 21 23 23 28 28
2, 0 2, 1 2, 2 2, 3 2, 4 2, 5 2, 6 2, 7 2, 8 2, 9 2, 10 2, 11
0 5 7 7 12 12 12 12 12 12 12
1, 0 1, 1 1, 2 1, 3 1, 4 1, 5 1, 6 1, 7 1, 8 1, 9 1, 10 1, 11
0 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
0, 0 0, 1 0, 2 0, 3 0, 4 0, 5 0, 6 0, 7 0, 8 0, 9 0, 10 0, 11

Résolution


6, 0 6, 1 6, 2 6, 3 6, 4 6, 5 6, 6 6, 7 6, 8 6, 9 6, 10 6, 11
5, 0 5, 1 5, 2 5, 3 5, 4 5, 5 5, 6 5, 7 5, 8 5, 9 5, 10 5, 11
4, 0 4, 1 4, 2 4, 3 4, 4 4, 5 4, 6 4, 7 4, 8 4, 9 4, 10 4, 11
3, 0 3, 1 3, 2 3, 3 3, 4 3, 5 3, 6 3, 7 3, 8 3, 9 3, 10 3, 11
2, 0 2, 1 2, 2 2, 3 2, 4 2, 5 2, 6 2, 7 2, 8 2, 9 2, 10 2, 11
1, 0 1, 1 1, 2 1, 3 1, 4 1, 5 1, 6 1, 7 1, 8 1, 9 1, 10 1, 11
0, 0 0, 1 0, 2 0, 3 0, 4 0, 5 0, 6 0, 7 0, 8 0, 9 0, 10 0, 11
0 5 7 13 16 18 21 23 29 29 34
0 5 7 13 16 18 21 23 29 29 34
0 5 7 7 16 16 21 23 23 28 28
0 5 7 7 12 12 12 12 12 12 12
0 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5

Résolution


6, 0 6, 1 6, 2 6, 3 6, 4 6, 5 6, 6 6, 7 6, 8 6, 9 6, 10 6, 11
0 5 10 13 16 18 23 26 29 31 34
5, 0 5, 1 5, 2 5, 3 5, 4 5, 5 5, 6 5, 7 5, 8 5, 9 5, 10 5, 11
0 5 7 13 16 18 21 23 29 29 34
4, 0 4, 1 4, 2 4, 3 4, 4 4, 5 4, 6 4, 7 4, 8 4, 9 4, 10 4, 11
0 5 7 13 16 18 21 23 29 29 34
3, 0 3, 1 3, 2 3, 3 3, 4 3, 5 3, 6 3, 7 3, 8 3, 9 3, 10 3, 11
0 5 7 7 16 16 21 23 23 28 28
2, 0 2, 1 2, 2 2, 3 2, 4 2, 5 2, 6 2, 7 2, 8 2, 9 2, 10 2, 11
0 5 7 7 12 12 12 12 12 12 12
1, 0 1, 1 1, 2 1, 3 1, 4 1, 5 1, 6 1, 7 1, 8 1, 9 1, 10 1, 11
0 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
0, 0 0, 1 0, 2 0, 3 0, 4 0, 5 0, 6 0, 7 0, 8 0, 9 0, 10 0, 11

Mise en œuvre et Complexité

- On peut retrouver la solution si on a marqué le chemin en remontant dans le tableau.
- Le temps d'exécution de l'algorithme précédent pour résoudre le problème du sac-à-dos est dans $O(n \times W)$
  il n'est pas seulement polynomial en n mais dépend du plus grand entier en entrée du problème (W).
- Le problème est NP-difficile, mais il est *pseudo-polynomial* :
  Il peut être résolu efficacement quand les nombres w_i sont petits.