Liens entre comparaison stochastique, invariance d'ensembles et réductions de systèmes dynamiques

L. TRUFFET
Laurent.Truffet@emn.fr

Cœur du projet MathSTIC 2004-05, avec J. Ledoux IRMAR

Contrôle de systèmes à événements discrets via des techniques de comparaison et réduction de systèmes stochastiques

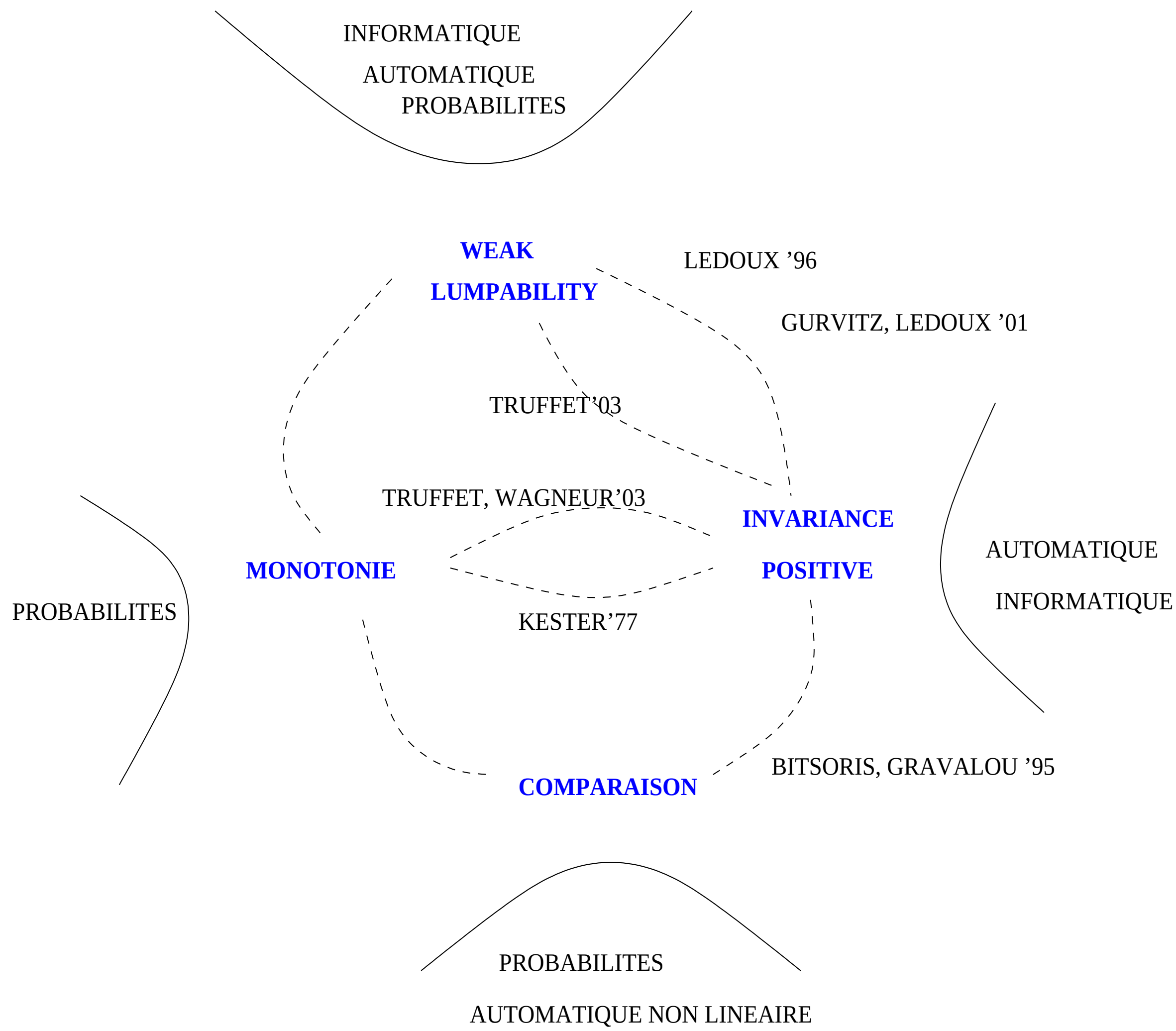

Figure 1: Cœur du projet MathSTIC 2004-05, avec J. Ledoux IRMAR

Fixons un cadre pour expliciter les liens entre les différents concepts: comparaison/monotonie, invariance d'ensembles, weak lumpability.

$$\begin{cases} x(0) & \in \mathbb{R}_+^n \\ x(t+1) & = Ax(t),\ t \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1}$$

où $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$

Comparsons des vecteurs ...

Ordre produit sur $\mathbb{R}^m$:

$$x, y \in \mathbb{R}^m : \quad x \leq_m y \Leftrightarrow \forall i,\, x_i \leq y_i$$

Ordre linéaire associé à l'ordre produit sur $\mathbb{R}^m$:

$$x, y \in \mathbb{R}^n : \quad x \leq_K y \Leftrightarrow Kx \leq_m Ky$$
$$K \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Remarques:

1) $\leq_K$ est un préordre pour K quelconque

2) si K est injective alors $\leq_K$ est un ordre partiel

$\leq_K$-comparaison de systèmes linéaires

$x(0), x(t+1) = Ax(t)$ à comparer avec $y(0), y(t+1) = By(t)$

$$(A).\ \forall x(0), y(0),\ (x(0) \leq_K y(0) \Rightarrow \forall t,\ x(t) \leq_K y(t))$$

Résultat 0.1 *Si (i). $x(0) \leq_K y(0)$, (ii) $KA \leq KB$ (terme à terme) et (iii). A ou B $\leq_K$-MONOTONE alors (A) est vraie.*

A est $\leq_K$-monotone si

$$\forall x, y,\ (x \leq_K y \Rightarrow Ax \leq_K Ay)$$

(morphisme $(\leq_K, \leq_K)$-compatible)

Strong Lumpability (CS de weak lumpability)

Soit $\phi : E := \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\} =: F$ surjective (croissante)

$$\begin{cases} x(0) & \in \mathbb{R}_+^n \\ x(t) & = Ax(t-1),\ t \geq 1 \\ y(t) & = V_\phi \end{cases}$$

$A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$
$V_\phi \in \mathbb{R}^{m \times n}: \quad V_\phi(f, e) = 1 \text{si } \phi(f) = e, 0 \text{sinon}.$

$$(y(t))_t \text{ a une dynamique linéaire } \Leftrightarrow \exists H \geq 0,\ V_\phi A = H V_\phi$$

Contrôle: invariance positive de cone polyhédral

Cone: $\mathcal{C}(K) = \{x|\ Kx \leq_m 0\}$

$$(B).\ \forall x(0),\ (x(0) \in \mathcal{C}(K) \Rightarrow \forall t, x(t) \in \mathcal{C}(K)$$

où: $x(0),\ x(t+1) = Ax(t), \forall t.$

Résultat 0.2

$$\begin{aligned} (B)\ \textit{vraie} \quad & \Leftrightarrow A\mathcal{C}(K) \subseteq \mathcal{C}(K) \\ & \Leftrightarrow \mathcal{C}(K) \subseteq \mathcal{C}(KA) \end{aligned}$$

Résumons nous

$$
\begin{array}{ll}
A \le_K\text{-monotone} & \Leftrightarrow \forall x, y,\ (x \le_K y \Rightarrow Ax \le_K Ay) \\
 & \Leftrightarrow \forall u, (Ku \le_m 0 \Rightarrow KAu \le_m 0) \\
A \text{ strong lumpable} & \Leftrightarrow \exists H \ge 0,\ V_\phi A = H V_\phi \\
\mathcal{C}(K) \text{ est invariant par } A & \Leftrightarrow \mathcal{C}(K) \subseteq \mathcal{C}(KA)
\end{array}
$$

... et Farkas (1902) apporta la lumière ...

$$\mathcal{C}(P) \subseteq \mathcal{C}(Q) \Leftrightarrow \exists H \geq 0,\ Q = HP$$

Résultats fondamentaux

Mise en évidence des liens entre opérateur monotone, réduction de modèle stochastique et (non)-observabilité et/ou contrôle.

$$A \leq_K\text{-monotone} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{C}(K) \text{ invariant par } A$$

$$\begin{tikzcd}
A \text{ strong lumpable} \arrow[rr] & & A \leq_{V_\phi}\text{-monotone} \arrow[dl] \\
& \mathcal{C}(V_\phi) \text{ invariant par } A \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

et ça marche dans max-plus ...

L. TRUFFET, *Some Ideas for Comparison of Bellman Chains*, Kybernetika, Vol. 39(2) -Special issue on max-plus algebra-, pp. 155-163, (2003).

J. LEDOUX and L. TRUFFET, *Comparison and Aggregation of Max-Plus Linear Systems*, Linear Algebra and Its Applications, 378, pp. 245-272, (2004).

L. TRUFFET, *New Bounds For Timed Event Graphs Inspired by Stochastic Majorization Results*, Journ. Discrete Events Dynamic Systems, 14(4), pp. 355-380, (2004).

L. TRUFFET, *Monotone Linear Dynamical Systems Over Dioids*, Lect. Notes in Contr. and Inf. Sc. 294, Springer-Verlag. pp. 39-46, (2003).

L. TRUFFET and E. WAGNEUR, *Monotonicity and Positive Invariance of Linear Systems Over Dioids*, Discr. Appli. Math., à paraître 2005.